2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

2.1. Сходимость функциональных рядов.

Рассмотрим функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (2.1)$$

где $f_n(x)$, n = 1,2,... – функции, определенные на некотором множестве G .

Областью сходимости ряда (2.1) называется множество всех $x=x_0\in$G, при которых числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится (хотя бы условно). Отыскание области сходимости можно производить по схеме:

1) находим, при каких фиксированных $x\in$G сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, составленный из модулей членов ряда (2.1) (это точки абсолютной сходимости), используя достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов;

2) для тех x, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ *расходится*, исследуем на условную сходимость исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Пример 2.1. Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^{2x}\left(n^2+a^x\right)} \qquad (2.2)$$

Так как $(n+1)^{2x}>0$, $\left(n^2+a^x\right)>0$ при любых действительных x и $n\in N$, то исследуем ряд (2.2) как числовой знакоположительный ряд. Видим, что при $n\to\infty$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^{2x}\left(n^2+a^x\right)}=\frac{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{2x}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2x}n^2\left(1+\dfrac{a^x}{n^2}\right)}\approx\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{2x+2}}=\frac{1}{n^{2x+\frac{3}{2}}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2x+\frac{3}{2})}$ сходятся как обобщённый гармонический при $2x+\frac{3}{2}>1$, т.е. $x>-\frac{1}{4}$, и расходится при $x\le-\frac{1}{4}$. Значит, по II признаку сравнения, в силу соотношения эквивалентности, исходный ряд сходится при $x>-\frac{1}{4}$ и расходится при $x\le-\frac{1}{4}$.

Таким образом, область сходимости ряда (2.2) – множество x, удовлетворяющих неравенству $x>-\frac{1}{4}$.

Пример 2.2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(x^2-5x+4\right)^n}\cdot\frac{n}{n+1}$$

Очевидно, область определения ряда $x\in R\setminus\{1;4\}$.

Применив признак Коши к ряду из абсолютных величин, получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ f_n(x)\,|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{|\ x^2-5x+4\ |^n}\cdot\frac{n}{n+1}}=\frac{2}{|\ x^2-5x+4|}$$

ряд будет сходится если $\frac{2}{|\ x^2-5x+4|}<1$, то есть

$$|\,x^2-5x+4\,|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4>2 \\ x^2-5x+4<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ x<\frac{5-\sqrt{17}}{2} \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

При $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; 2; 3 признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Дополнительно исследуем исходный ряд в этих точках.

При x=2; 3 имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$, при $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ - ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, полученные ряды расходятся , т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$).

Значит, область сходимости исходного ряда есть множество $D=\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (2;3) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$, причем сходимость абсолютная.

Пример 2.3. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[5]{n}} x^{2n} \sin(x+\pi n).$$

При $x = \pi\kappa, \kappa \in Z, \sin x = 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[5]{n}} \left[x^{2n} \sin(x+\pi n)\right] = 0$, т.е. ряд сходится.

Пусть $x \neq \pi\kappa, \kappa \in Z$. Применим признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}} x^{2n} \left|\sin(x+\pi n)\right|} = 2x^2 < 1,$ если $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть : $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ряд сходится . При $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ признак Коши не решает вопроса о сходимости ряда.

Исследуем исходный ряд в этих точках. Так как $\sin(x+\pi n) = (-1)^n \sin x$ то для $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt[5]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{5}}} \sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Это ряды типа Лейбница, сходящиеся условно. Таким образом, область сходимости исходного ряда – множество

$D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \{x = \pi\kappa; \kappa = 0, \pm 1, \pm 2...\}$, при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ сходимость условная.

Пример 2.4. Найти область сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\sqrt{x}}}{\ln(e-x)} arctg \frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}$$

Область определения ряда: $0 \leq x < e, \quad x \neq e-1$. Применив признак Коши, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\sqrt{x}}}{\ln(e-x)}\left|arctg\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\sqrt{x}}}{|\ln(e-x)|}*\frac{|x|}{3^{n\sqrt{x}}}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{3^{n\sqrt{x}}}=\left(\frac{e}{3}\right)^{\sqrt{x}}$$

т.к. $arctg\dfrac{x}{3^{n\sqrt{x}}}\approx\dfrac{x}{3^{n\sqrt{x}}}, n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln(e-x)|}=1$. Очевидно, что $\left(\dfrac{e}{3}\right)^{\sqrt{x}}<1$, при $x>0$.

При $x=0$ $f_n(x)=0$, $n=1,2,...$, т.е. ряд сходится. Значит, с учетом области определения, имеем область сходимости $D=\{x:0\le x<e, x\ne e-1\}$.

Пример 2.5. Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+2)\ln(n+2)}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1}(n+2)\ln(n+2)}{(n+3)\ln(n+3)|x+5|^n}=\lim_{n\to\infty}|x+5|\frac{(n+2)}{(n+3)}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}=|x+5|,$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}=\lim_{t\to\infty}\frac{[\ln(t+2)]'}{[\ln(t+3)]'}=\lim_{t\to\infty}\frac{t+3}{t+2}=1.\right)$$

Значит, при $|x+5|<1$, т.е. при $-6<x<-4$ ряд сходится абсолютно. При $x=-4$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$, который расходится по интегральному признаку. При $x=-6$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$, который сходится по признаку Лейбница (условно). Значит , область сходимости – множество $D=\{x:-6\le x<-4\}$; при $x=-6$ сходимость условная.