Лабораторная работа №7

Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Краевые задачи в электромеханике возникают, как правило, при моделировании установившихся состояний электромагнитного или теплового полей в средах, характеризующихся скачкообразным изменением физических свойств: вблизи краев сердечников, вблизи поверхности корпуса, в межполюсном пространстве, внутри паза и т.п. Поскольку поля электрических машин описываются уравнениями второго порядка (см. главы 4,5 пособия), ниже рассматриваются методы решения таких уравнений.

7.1 Краевая задача для дифференциальных уравнений, ее сведение к двум задачам Коши

Краевой задачей для линейного дифференциального уравнения второго порядка называют задачу вида:

$$\left.\begin{array}{r} l(y) = y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) \\ l_1(y)_{x=0} = \alpha y(0)+\beta y'(0) = A \\ l_2(y)_{x=l} = \gamma y(l)+\delta y'(l) = B \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

где *p(x), q(x), y(x), f(x)* - достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на отрезке [0,l] функции, *α,β,γ,δ* – постоянные коэффициенты.

Одним из методов решения краевой задачи является метод ее сведения к двум задачам Коши. Метод базируется на том, что искомое решение представляют в виде:

$$y(x) = U(x) + C\cdot V(x). \qquad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к ДУ:

$$U'' + p(x)U' + q(x)U + C\cdot(V'' + p(x)V' + q(x)V) = f(x) \qquad (3)$$

Потребуем, чтобы $V(x)$ удовлетворяла ЛОДУ. Тогда функция $U(x)$ будет удовлетворять соответствующему ЛНДУ:

$$V'' + p(x)V' + q(x)V = 0; \qquad (4)$$

$$U'' + p(x)U' + q(x)U = f(x) \qquad (5)$$

Подстановка (4), (5) в краевые условия приводит к системе выражений для определения начальных условий и константы *C*:

$$\alpha\cdot U(0) + \beta\cdot U'(0) + C\cdot(\alpha\cdot V(0) + \beta\cdot V'(0)) = A \qquad (6)$$

$$\alpha\cdot U(l) + \beta\cdot U'(l) + C\cdot(\alpha\cdot V(l) + \beta\cdot V'(l)) = B \qquad (7)$$

Получим из (6) начальные условия, а формулу для определения коэффициента C из (7). Возьмем значение функции $V(0)=1$. Тогда для того, чтобы C не учитывалась в определении начальных условий, необходимо чтобы скобка в выражении (7) обратилась в ноль. Для этого достаточно положить $V'(0)=-\alpha/\beta, \quad \beta \neq 0$. Таким образом, для ЛОДУ имеем задачу Коши:

$$\left.\begin{array}{c} V''+p(x)\bullet V'+q(x)\cdot V=0 \\ V(0)=1,\ V'(0)=-\alpha/\beta, \beta\neq 0 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Для неоднородного ДУ достаточно положить $U(0)=A/\alpha, \alpha\neq 0$, откуда $U'(0)=0$. Записываем вторую задачу Коши:

$$\left.\begin{array}{c} U''+p(x)\bullet U'+q(x)\cdot U=f(x) \\ U(0)=A/\alpha, \alpha=0, U'(0)=0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Таким образом, краевая задача для дифференциального уравнения свелась к двум задачам Коши для линейных ДУ второго порядка. После того как решение задач Коши найдено численно или аналитически, найдем константу C. Для этого воспользуемся условием (7), из которого следует, что:

$$C=\frac{B-\gamma\cdot U(l)-\delta\cdot U'(l)}{\gamma\cdot V'(l)+\delta\cdot V'(l)}. \tag{10}$$

Линейная комбинация (2) с учетом решений (8)-(10) будет искомым решением.

7.2 Сведение неоднородных краевых условий к однородным. Метод коллокаций

Пусть имеется краевая задача (1) с неоднородными краевыми условиями.

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \\ \alpha y(0)+\beta y'(0)=A \\ \gamma y(l)+\delta y'(l)=B \end{cases}.$$

При подборе системы линейно-независимых функций, используемых при аналитическом построении решения, желательно иметь однородные краевые условия. Преобразуем неоднородные краевые условия в однородные при помощи замены переменных:

$$y=\tilde{y}+kx+b.$$

Константы k, b подберем с учетом краевых условий из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\,\tilde{y}(0)+\beta\,\tilde{y}'(0)+\alpha(0+b)+\beta k=A \\ \gamma\,\tilde{y}(l)+\delta\tilde{y}'(l)+\gamma(kl+b)+k\delta=B \end{cases}.$$

Потребуем, чтобы k,b были решением системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha b+\beta k=A \\ \gamma b+(\gamma l+\delta)k=B \end{cases}.$$

Тогда

$$b=\frac{\begin{vmatrix} A & \beta \\ B & \gamma l+\delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma l+\delta \end{vmatrix}},\ k=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & A \\ \gamma & B \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Первая и вторая производная решения приобретают вид:

$$y'=\tilde{y}'+k,\qquad y''=\tilde{y}''$$

и исходная краевая задача превращается следующую задачу с однородными краевыми условиями:

$$l(\tilde{y})=\tilde{y}''+p(x)(\tilde{y}'+k)+q(x)(\tilde{y}+kx+b))=f^*(x), \tag{11}$$

$$l_1(\tilde{y})_{x=0}=\alpha\,\tilde{y}(0)+\beta\,\tilde{y}'(0)=0, \tag{12}$$

$$l(\tilde{y})_{x=l}=\gamma\,\tilde{y}(l)+\delta\,\tilde{y}'(l)=0, \tag{13}$$

$$f^*(x)=f(x)-p(x)k-q(x)(kx+b). \tag{14}$$

Рассмотрим метод построения приближенного решения поставленной краевой задачи в аналитической форме записи, называемый методом коллокаций (от англ. collocation - . выровненное размещение).

Пусть имеется система линейно независимых функций

$$\{\varphi_i(x)\},\ i=1..n,$$

каждая их которых удовлетворяет краевым условиям (12) и (13). Если решение задачи (11)-(14) представить в виде:

$$\tilde{y}=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x), \tag{15}$$

то, в силу линейности краевых условий, они будут удовлетворены. Но на всем интервале разность между левой и правой частями дифференциального уравнения не будет равна нулю

$$l(\tilde{y}) - f^*(x) \neq 0 .$$

Невязка решения дифференциального уравнения

$$\Psi(x) = l(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)) - f^*(x)$$

содержит *n* неизвестных констант c_i.

Приравнивая невязку $\Psi(x)$ к нулю в *n* внутренних точках интервала, получаем систему из *n* линейных алгебраических уравнений вида

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_1)) = f^*(x_1) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_2)) = f^*(x_2), \\ \Lambda \\ \sum_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_n)) = f^*(x_n), \end{array}\right\}, \qquad (16)$$

записанную относительно неизвестных констант. После определения констант из системы (16) будет построено приближенное решение однородной краевой задачи в форме (15).

Решение исходной неоднородной задачи получается добавлением к функции $\tilde{y}$ линейной функции $kx + b$:

$$y \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) + kx + b .$$

Пример решения краевой задачи по шагам приведен ниже.

<u>Пример 7.1</u>. На отрезке [0,1] решить методом коллокаций краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{array}{l} y'' + x \cdot y' + x^2 \cdot y = x(x-1) \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{array} .$$

Возьмем для построения решения три линейно независимые функции, удовлетворяющие краевым условиям.

```
1).x:='x':y:=(a1*x*(x-1)+a2*x^2*(x-1)+a3*x^3*(x-1),x);#Построение приближенного решения, удовлетворяющего краевым условиям, в виде суммы трех слагаемых
```

$$y := x \to a1\, x\, (x-1) + a2\, x^2\, (x-1) + a3\, x^3\, (x-1)$$

```
2).nv:=(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x);#Задание функции невязки
```

$$nv := x \to 2\, a1 + 2\, a2\, (x-1) + 4\, a2\, x + 6\, a3\, x\, (x-1) + 6\, a3\, x^2 + x\, (a1\, (x-1) + a1\, x + 2\, a2\, x\, (x-1) + a2\, x^2 + 3\, a3\, x^2\, (x-1) + a3\, x^3) + x^2\, (a1\, x\, (x-1) + a2\, x^2\, (x-1) + a3\, x^3\, (x-1)) - x\, (x-1)$$

```
3).l1:=nv(1/4);l2:=nv(1/2);l3:=nv(3/4);# нахождение значений невязки в точках коллокации для получения левых частей СЛАУ
```

$$l1 := \frac{477}{256}\, a1 - \frac{595}{1024}\, a2 - \frac{3203}{4096}\, a3 + \frac{3}{16}$$

$$l2 := \frac{31}{16}\, a1 + \frac{27}{32}\, a2 - \frac{9}{64}\, a3 + \frac{1}{4}$$

$$l3 := \frac{581}{256}\, a1 + \frac{2623}{1024}\, a2 + \frac{8973}{4096}\, a3 + \frac{3}{16}$$

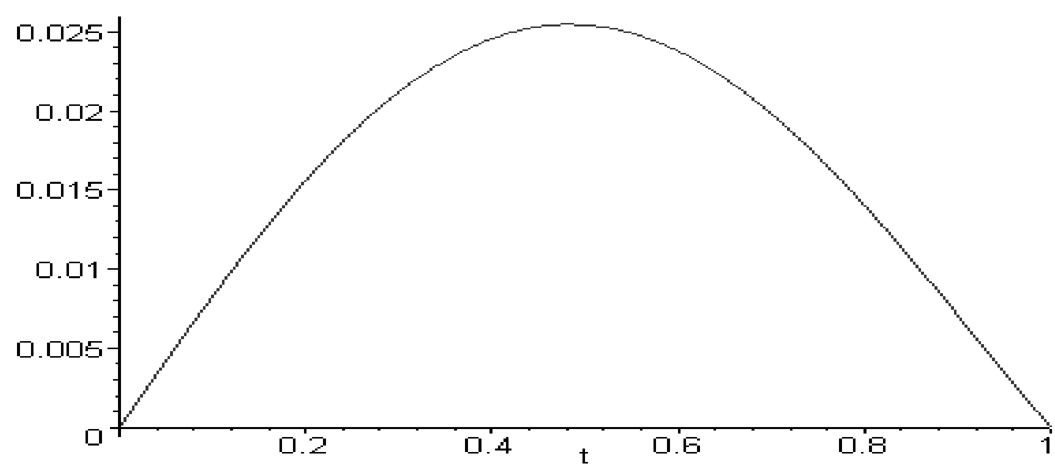
```
4).{l1=0,l2=0,l3=0},{a1,a2,a3};#Составление и решение системы линейных уравнений относительно неизвестных констант
```

$$s2 := \{a3 = \frac{14949184}{147083039},\, a2 = \frac{-12533312}{147083039},\, a1 = \frac{-12435380}{147083039}\}$$

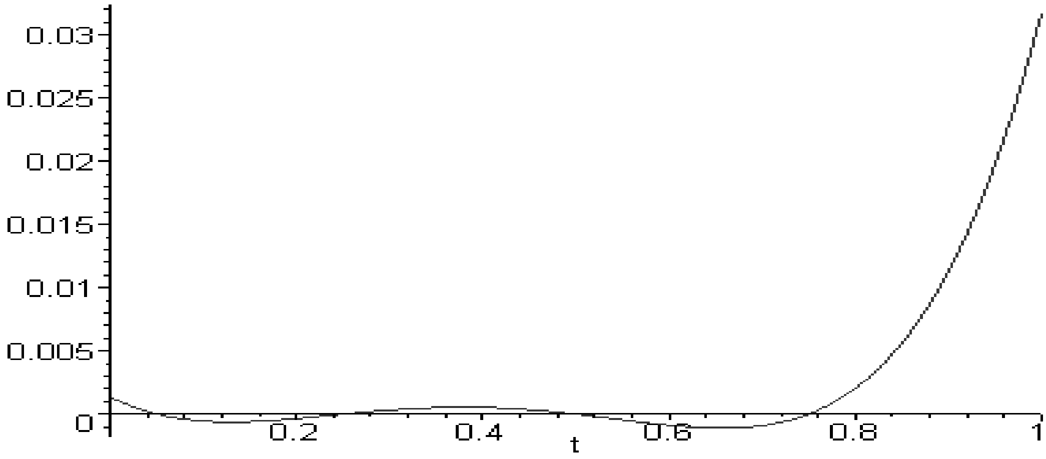
```
5).#Оценка полученного приближенного решения
```

$$-.08454666211\, x\, (x-1.) - .08521249007\, x^2\, (x-1.) + .1016377150\, x^3\, (x-1.)$$

```
6). #Построение графика приближенного решения
```




```
7).diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x=0..1);
#Построение графика невязки, после подстановки в исходное выражение, для оценки погрешности приближенного решения
```



Из графика следует, что максимальная погрешность имеет величину около 0.03 и наблюдается на правой границе отрезка.

7.3 Метод Бубнова-Галеркина

Для линейной краевой задачи $l(y) = f(x)$ с однородными краевыми условиями $l_1(y) = 0$ и $l_2(y) = 0$ подбирают систему функций $\{\ \varphi_i(x)\ \}$, так чтобы эти функции были линейно независимы и удовлетворяли однородным краевым условиям:

$$l_1(\varphi_i(x))|_{x=0} = 0 \text{ и } l_2(\varphi_i(x))|_{x=l} = 0\,.$$

Рекомендуется, чтобы функции $\{\ \varphi_i(x)\ \}$ были ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\left(\varphi_i(x), \varphi_j(x)\right) = \int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0\,.$$

Приближенное решение дифференциального уравнения отыскивается в виде суммы

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x)\,.$$

Для нахождения констант C_i составляют систему уравнений, требуя ортогональности невязки решения

$$\psi(x) = l(y^*) - f(x)$$

каждой функции φ_i в смысле скалярного произведения. Таким образом, получают систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$
\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_1(x)) = (f(x), \varphi_1(x)) \\
\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_2(x)) = (f(x), \varphi_2(x)) \\
\qquad\qquad\qquad \Lambda \\
\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_n(x)) = (f(x), \varphi_n(x))
\end{array}\right\}, \qquad (17)
$$

имеющую единственное решение.

После определения значений неизвестных констант из системы (17), получается приближенное решение исходной задачи в аналитической форме записи:

$$
y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x). \qquad (18)
$$

Приведенный ниже пример применения метода иллюстрирует его возможности. Решается та же краевая задача, что и в примере 7.1.

Пример 7.2. На отрезке [0,1] решить методом Бубнова – Галеркина краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$
\begin{array}{l}
y'' + x \cdot y' + x^2 \cdot y = x(x-1) \\
y(0) = 0, y(1) = 0
\end{array}.
$$

1).y:=(a1*sin(Pi*x)+a2*sin(2*Pi*x)+a3*sin(3*Pi*x)+a4*sin(4*Pi*x),x);# Построение приближенного решения

$$
y := x \to a1 \sin(\pi x) + a2 \sin(2\pi x) + a3 \sin(3\pi x) + a4 \sin(4\pi x)
$$

2).**nv1:=(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x); #Функция невязки решения**

$$
\begin{aligned}
nv1 := x \to & -a1 \sin(\pi x)\pi^2 - 4\, a2 \sin(2\pi x)\pi^2 - 9\, a3 \sin(3\pi x)\pi^2 - 16\, a4 \sin(4\pi x)\pi^2 \\
& + x\,(a1 \cos(\pi x)\pi + 2\, a2 \cos(2\pi x)\pi + 3\, a3 \cos(3\pi x)\pi + 4\, a4 \cos(4\pi x)\pi) \\
& + x^2\,(a1 \sin(\pi x) + a2 \sin(2\pi x) + a3 \sin(3\pi x) + a4 \sin(4\pi x)) - x\,(x-1)
\end{aligned}
$$

3).l1:=int(nv1(x)*sin(Pi*x),x=0..1);l2:=int(nv1(x)*sin(2*Pi*x),x=0..1);l3:=int(nv1(x)*sin(3*Pi*x),x=0..1);l4:=int(nv1(x)*sin(4*Pi*x),x=0..1);# Ортогональность невязки линейно-независимым функциям, используемым при построении решения по (17). При этом получаются левые части СЛАУ

$$
\begin{aligned}
l1 := -\frac{1}{3600}(& 1800\, a1\, \pi^5 - 1350\, \pi^3 a3 + 2400\, a2\, \pi^3 + 3200\, a2\, \pi + 900\, a1\, \pi + 256\, a4\, \pi \\
& + 300\, a1\, \pi^3 + 960\, a4\, \pi^3 - 675\, a3\, \pi - 14400) \big/ \pi^3
\end{aligned}
$$

$$l2 := -\frac{1}{3600}(-2400\,a4\,\pi^2 + 4320\,a3\,\pi^2 + 3456\,a3 - 800\,a4 + 3200\,a1 + 300\,a2\,\pi^2 - 2400\,a1\,\pi^2 + 7200\,a2\,\pi^4 + 225\,a2) \Big/ \pi^2$$

$$l3 := \frac{1}{529200}(-508032\,a2\,\pi - 198450\,a1\,\pi^3 - 14700\,a3\,\pi - 518400\,a4\,\pi + 635040\,a2\,\pi^3 + 99225\,a1\,\pi + 78400 - 907200\,a4\,\pi^3 - 44100\,\pi^3\,a3 - 2381400\,a3\,\pi^5) \Big/ \pi^3$$

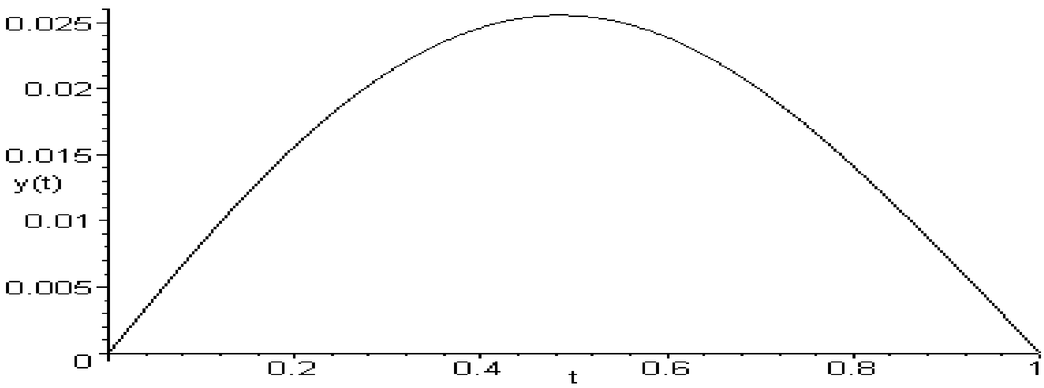
$$l4 := -\frac{1}{705600}(-188160\,a1\,\pi^2 + 470400\,a2\,\pi^2 + 50176\,a1 + 691200\,a3 + 5644800\,a4\,\pi^4 + 58800\,a4\,\pi^2 - 1209600\,a3\,\pi^2 - 156800\,a2 + 11025\,a4) \Big/ \pi^2$$

4).{l1=0,l2=0,l3=0,l4=0},{a1,a2,a3,a4}:;#Составление и решение системы уравнений относительно неизвестных констант a1,a2,a3,a4

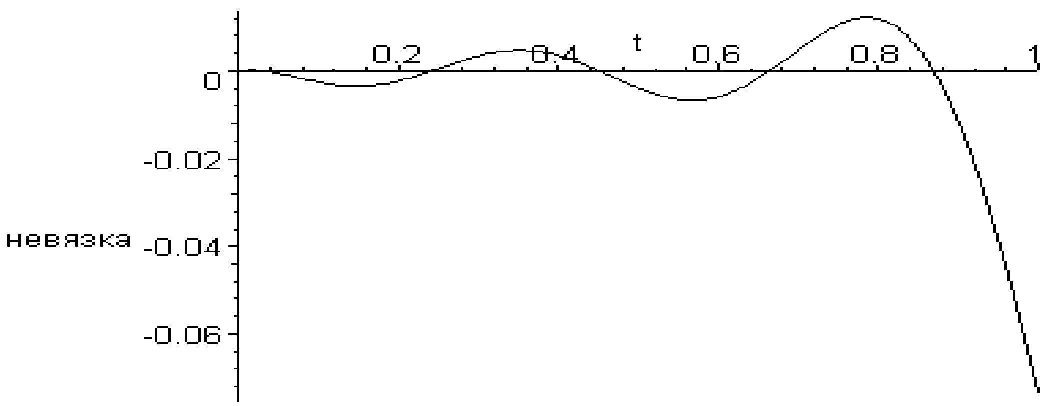
5).**# Оценка вида приближенного решения**

$$.02545617921\sin(3.141592654x) + .0007481628720\sin(6.283185308x) - .00008083082153\sin(9.424777962x) + .00007581343845\sin(12.56637062x)$$

6).**#Построение графика приближенного решения**



7).diff(y(t),t$2)+t*diff(y(t),t)+t^2*y(t)-t*(t-1); # Нахождение невязки построение графика невязки



Из графика следует, что максимальная погрешность имеет величину около 0.06 и наблюдается на правой границе отрезка.

7.4. Метод прогонки

Метод прогонки для решения краевой задачи.

$$\begin{cases} l(y) = y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x) \\ l_1(y)\big|_{x=0} = \alpha\cdot y + \beta\cdot y'\big|_{x=0} = A \\ l_2(y)\big|_{x=l} = \gamma\cdot y + \delta\cdot y'\big|_{x=l} = B \end{cases} \qquad (19)$$

Для построения приближенного решения задачи (19) введем дискретно заданную функцию y_n определенную в $n+1$ точке на $[0,l]$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l$. Она в узлах $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l$ имеет те же значения, которые имеет и решение исходной задачи.

Справедливы следующие приближенные равенства для первой и второй производных искомого решения:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},\ i = 0,\ldots,n-1, \sim o(h)$$ - порядок погрешности

$$y_i'' = \frac{y_{i+2} - 2\cdot y_{i+1} + y_i}{h^2},\ i = 0,\ldots,n-2, \sim o(h)$$

Используя функцию y_n, можно систему (19) свести к системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{l}(y) = \dfrac{y_{i+2} - 2\cdot y_{i+1} + y_i}{h^2} + p(x_i)\cdot\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i)\cdot y_i = f(x_i) \\ \tilde{l}_1(y) = \alpha\cdot y_0 + \beta\cdot\dfrac{y_1 - y_0}{h} = A \\ \tilde{l}_2(y) = \gamma\cdot y_{n-1} + \delta\cdot\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{cases} \qquad (20)$$

Заменим краевую задачу (19) краевой задачей (20), при $i = 0,\ldots,n-2$.

Решение системы (20) при $h \to 0$ стремится к точному решению задачи (19), то есть схема (20) аппроксимирует исходную задачу.

Система (20) это система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_i, где введено обозначение $h = x_{i+1} - x_i$. В развернутой форме записи она имеет вид:

$$
\begin{cases}
y_0 \cdot (\alpha \cdot h - \beta) + \beta \cdot y_1 = A \cdot h \\
y_0 \cdot (q_0 \cdot h^2 - p_0 \cdot h + 1) + y_1 \cdot (p_0 \cdot h - 2) + y_2 = f_0 \cdot h^2 \\
y_1 \cdot (q_1 \cdot h^2 - p_1 \cdot h + 1) + y_2 \cdot (p_1 \cdot h - 2) + y_3 = f_1 \cdot h^2 \\
\Lambda\ \Lambda \\
y_{n-2} \cdot (q_{n-2} \cdot h^2 - p_{n-2} \cdot h + 1) + y_{n-1} \cdot (p_{n-2} \cdot h - 2) + y_n = f_{n-2} \cdot h^2 \\
y_{n-1} \cdot (\gamma \cdot h - \delta) + y_n \cdot \delta = B \cdot h
\end{cases}
$$

Эту систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений дискретной функции y_n запишем в виде:

$$
\begin{cases}
y_0 \cdot a_0 + y_1 \cdot b_1 = A_0 \\
y_0 \cdot a_1 + y_1 \cdot b_2 + y_2 = A_1 \\
\underline{\hspace{2.5cm}}\ y_1 \cdot a_2 + y_2 \cdot b_3 + y_3 = A_2 \\
\Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\
\underline{\hspace{5.5cm}}\ y_{n-2} \cdot a_{n-1} + y_{n-1} \cdot b_n + y_n = A_{n-1} \\
\underline{\hspace{9.5cm}}\ y_{n-1} \cdot a_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n
\end{cases}
$$

В матричной форме с трехдиагональной матрицей

$$
C = \begin{pmatrix}
a_0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & b_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_2 & b_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_3 & b_4 & 1 & 0 & 0 \\
\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_{n+1}
\end{pmatrix}
$$

она выглядит так

$$C \cdot \bar{y} = \bar{A}.$$

Для решения систем с такими матрицами применяется метод прогонки. Метод прогонки – это метод последовательного исключения неизвестных, начиная с первого уравнения с учётом специфики матрицы С. Алгоритм представлен ниже:

$$y_0 = \frac{A_0}{a_0} - \frac{b_1}{a_0} \cdot y_1 \xrightarrow{\text{подставим}} (2)$$

$$a_1 \cdot \frac{A_0}{a_0} - \frac{a_1 \cdot b_1}{a_0} \cdot y_1 + y_1 \cdot b_2 + y_2 = A_1 \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{A_1 a_0 - a_1 \cdot A_0}{b_2 a_0 - a_1 \cdot b_1} - \frac{a_0}{b_2 a_0 - a_1 \cdot b_1} \cdot y_2 = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{a}_1} - \frac{\tilde{a}_{i-1}}{\tilde{a}_1} y_2$$

$$y_i = \frac{A_i \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot \tilde{A}_{i-1}}{b_{i+1}\tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot b_i} - \frac{\tilde{a}_{i-1}}{b_{i+1}\tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot b_i} \cdot y_{i+1}.$$

где

$$\tilde{A}_i = A_i \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot \tilde{A}_{i-1}, \qquad \tilde{a}_i = b_{i+1}\tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot b_i, \quad \tilde{a}_0 = a_0, \tilde{A}_0 = A_0.$$

Или в более общем виде $y_{n-1} = D_n - E_n \cdot y_n$. Подстановка $y_{n-1} = D_n - E_n \cdot y_n$ в последнее разностное уравнений дает:

$$\Rightarrow y_{n-1} \cdot a_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n \Rightarrow a_n \cdot D_n - E_n \cdot a_n \cdot y_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n$$

Из последнего выражения определим

$$y_n = \frac{(A_n - a_n \cdot D_n)}{(b_{n+1} - E_n \cdot a_n)}.$$

Делая обратный ход, начиная с правого края области определения, получим значения решения во всех внутренних точках интервала. При возвращении к левому краю отрезка все y_i оказываются найденными с использованием рекуррентных формул.

<u>Пример 7.3</u>. Найти решение краевой задачи методом прогонки.

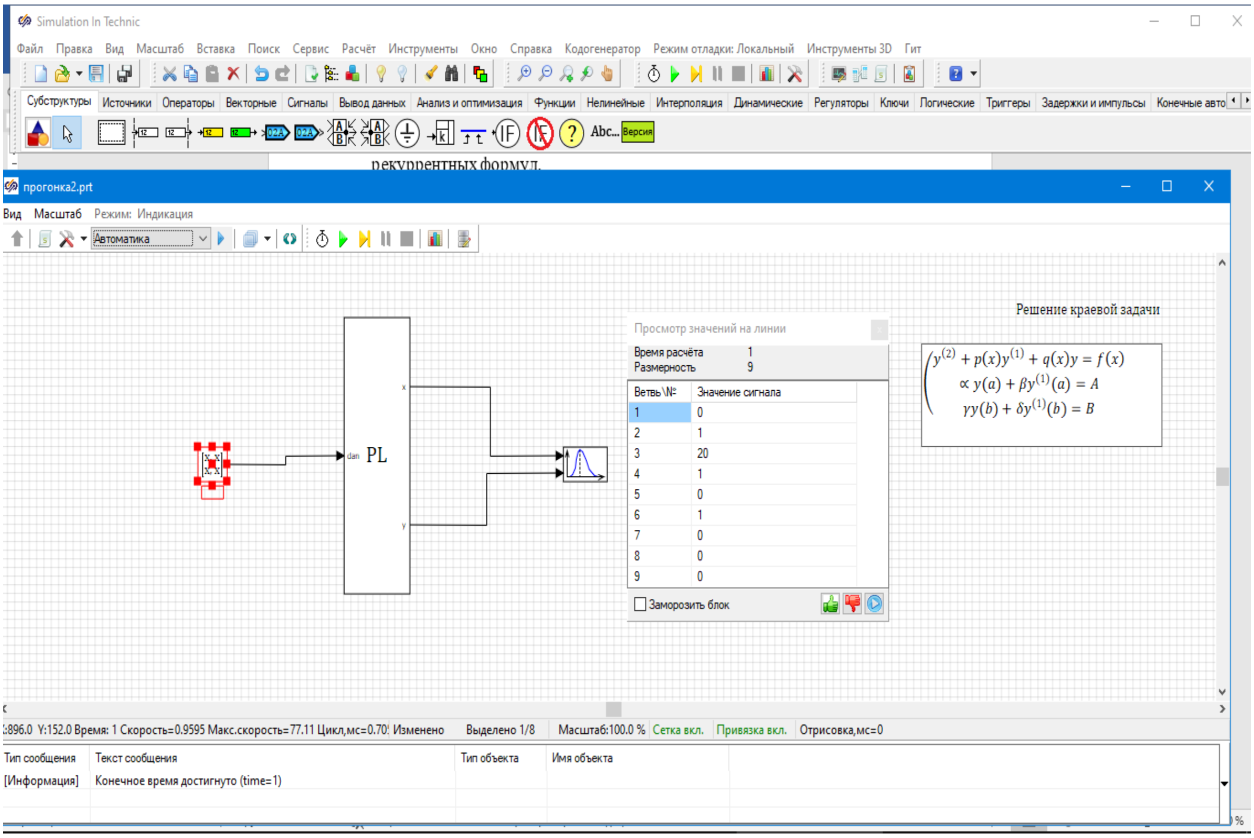
$$y'' + x \cdot y' + x^2 y = x(x-1)$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0$$

$$x_1 = 1/n, x_2 = 2/n, x_3 = 3/n, x_4 = 4/n, \ldots. x_{n+1} = 1$$

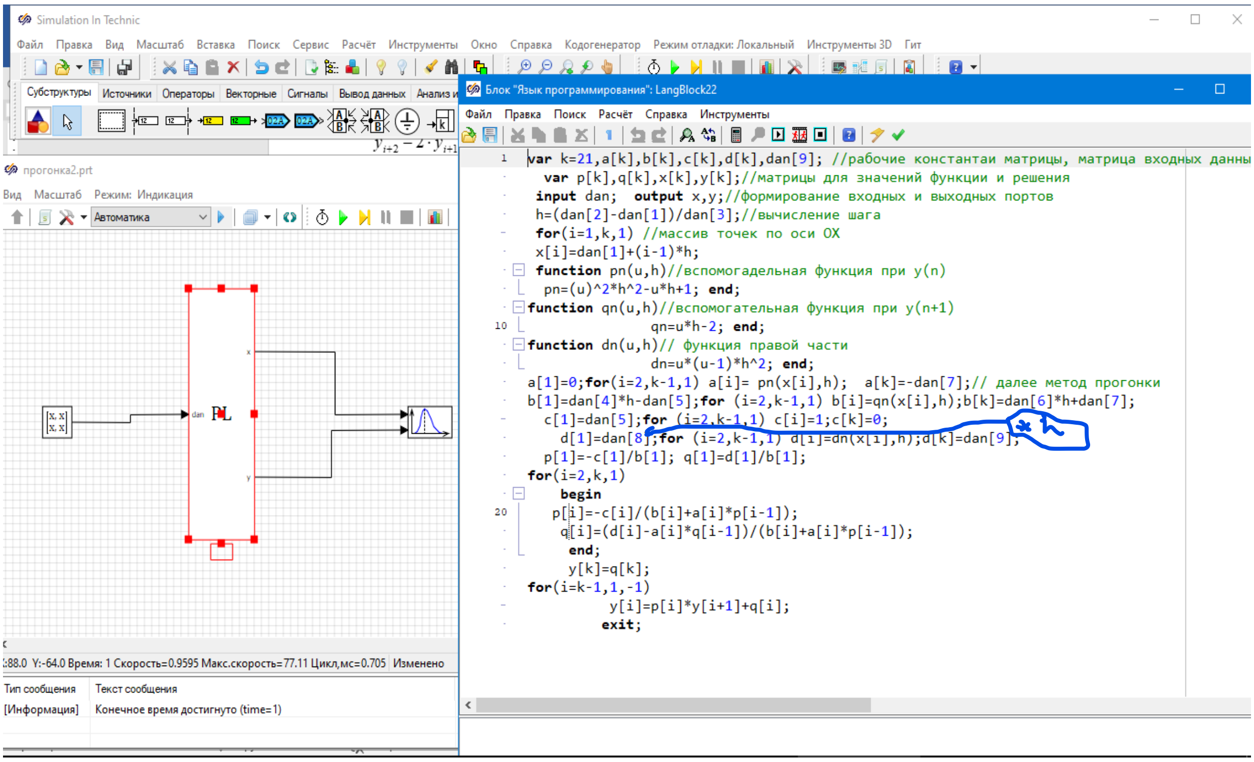
$$y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i + x_i \cdot h \cdot (y_{i+1} - y_i) + h^2 \cdot x_i^2 y_i = x_i \cdot h^2, i = 1,2,3....(n-1)$$

Решение в пакете Simintech выглядит следующим образом:

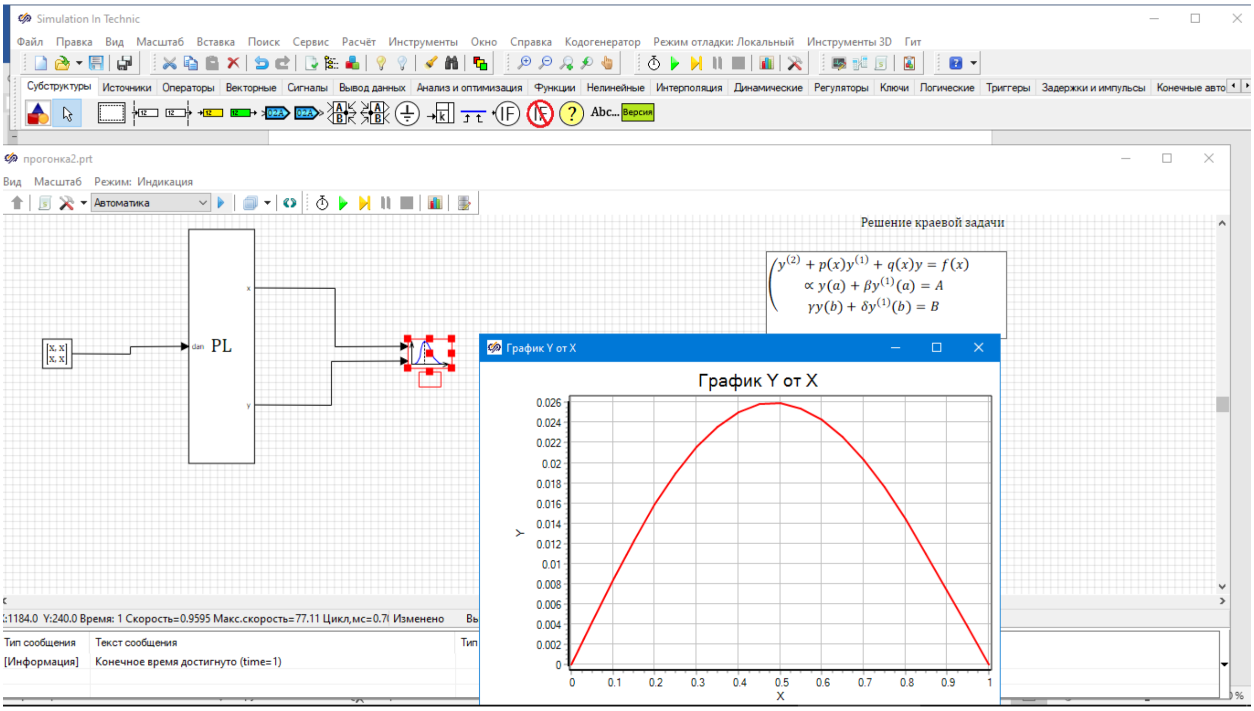
1). Задаем входные данные при помощи матрицы столбца: начало и конец отрезка существования решения, число шагов, в виде набора из нулей и единиц тип краевых условий и правые части краевых условий;



2). Затем создается блок решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Вычисление прогоночных коэффициентов осуществляется, как в лабораторной работе 4:



3). Вывод решения в виде графика с использованием стандартного блока вывод данных:



7.5 Контрольные вопросы и задания

1. Как сводится решение краевой задачи к двум задачам Коши?
2. Назовите основные положения метода коллокаций.
3. Назовите основные положения метода Бубнова-Галеркина.
4. Как производится оценка погрешности метода коллокаций?
5. Как производится оценка погрешности метода Бубнова-Галеркина?
6. Каковы основные положения метода прогонки?