Лабораторная работа №4.
Решение систем линейных уравнение (СЛУ).

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Обозначим через $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицу из коэффициентов системы, через $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец ее свободных членов и через $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$- столбец из неизвестных. Тогда система кратко может быть записана в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$. Вектор X, обращающий систему в тождество, будем называть решением этой системы.

Все методы решения систем линейных уравнений можно разбить на два класса: прямые и итерационные.

Прямые методы приводят к решению задачи за конечное число арифметических операций. Если все операции выполняются точно, то и решение будет точным. Понятно, однако, что из-за вычислительных ошибок (включая ошибки округления, а также возможные ошибки исходных данных) этот идеал практически недостижим. К прямым методам относятся: метод Крамера, метод Гаусса и его модификации (метод прогонки). **Итерационные методы** дают решение системы как предел последовательных приближений, вычисляемых по единообразной схеме. К ним относятся: метод простой итерации, метод Зейделя, градиентные методы.

Метод прогонки.

Метод прогонки прямой метод и является частным случаем метода Гаусса. Он применяется для решения СЛУ с трехдиагональными матрицами. Такие системы часто возникают при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных второго порядка.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

при этом будем полагать, что a_1=0, c_n=0.

Решение этой системы будем искать в виде

$$x_i = P_i \cdot x_{i+1} + Q_i,\ \ i = 1,2,\ldots,n,$$

где P_i, Q_i- **прогоночные коэффициенты, причем, так как** c_n=0, то $P_n = 0$, а $x_n = Q_n$.

Прогоночные коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1} \qquad\qquad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \cdot P_{i-1}} \qquad\qquad Q_i = \frac{d_i - a_i \cdot Q_{i-1}}{b_i + a_i \cdot P_{i-1}},$$

где $i = 2,3,\ldots,n$.

Общее число операций в методе прогонки равно $8n+1$, т.е. пропорционально числу уравнений. Такие методы решения СЛУ называют экономичными. Для сравнения число операций в методе Гаусса пропорционально n^3, правиле Крамера -$\sim n!$.

Для устойчивости метода прогонки достаточно выполнения условий:

$a_i \neq 0, c_i \neq 0$, где $i = 2,3,\ldots,n-1$, $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, где $i = 1,2,\ldots,n$

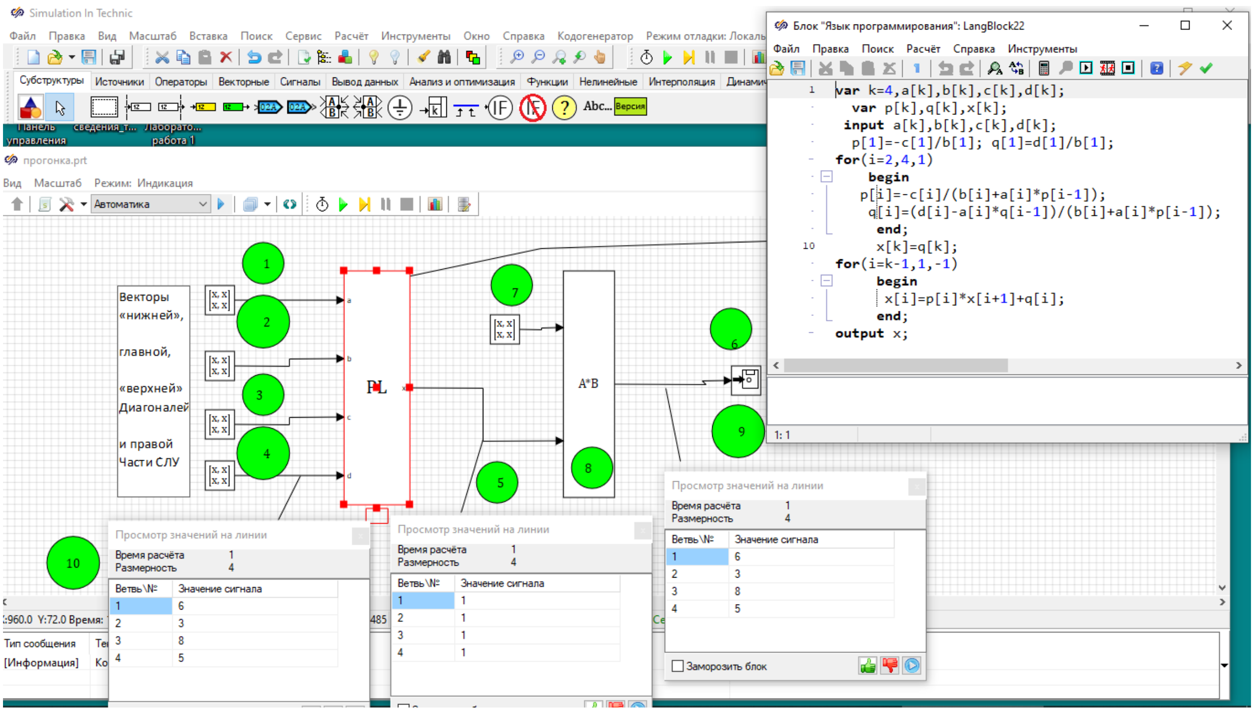
ПРИМЕР.

Методом прогонки решить СЛУ

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 6 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 8 \\ -x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение.

Применим структурную схему пакета Simintech, предоставленную ниже



На этой схеме, в рабочем окне, вызваны блоки формирования матриц из раздела векторные (1), (2), (3), (4). Затем из раздела динамические использован блок языка программирования (5), в котором набрана и отлажена программа формирования прогоночных коэффициентов и получения решения (6). Порты блоков (1), (2), (3), (4) соединены связями с портами ввода блока решения задачи методом прогонки (5). Для проверки решения исходной системы уравнений задана матрица левой части исходной системы (7) и использован блок умножения матриц (8) из раздела векторные. Передача данных из портов вывода (5) и (7) на порты ввода блока (8) позволяет получить вектор правых частей. Значения вектора правых частей записываются в блоке (9) из разделыа вывод данных. Установка курсора мыши на линии вывода блоков (4) и (8) после двойного щелка левой клавишей мыши позволяет увидеть значения данных на этих линиях и подтвердить правильность решения. С линии соединения блоков(5) и (8) щелкнув клавишей мыши можно увидеть значение решения СЛУ.

Ответ:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

Нормы матриц и векторов.

Для исследования сходимости численных методов решения задач линейной алгебры, вводится понятие нормы векторов и матриц.

Нормой вектора $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$в n-мерном пространстве назовем неотрицательное число $\|\vec{x}\|$ обладающее следующими свойствами:

1) $\|\bar{x}\| \geq 0, \|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
2) $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ для любых действительных чисел λ
3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

Норма в каждом пространстве вводится по-своему. Наиболее употребляемыми являются следующие:

I. $\|\bar{x}\|_I = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

II. $\|\bar{x}\|_{II} = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

III. $\|\bar{x}\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Рассмотрим линейное пространство квадратных матриц с действительными элементами, размером $n \times n$: $A_{n\times n}, B_{n\times n}, \ldots$.
Нормой матрицы $A_{n\times n}$ называют неотрицательное число $\|A\|$, обладающее свойствами:

1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\|$=0 тогда и только тогда, когда A-нулевая матрица
2) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ для любых действительных чисел $\lambda\lambda\,\lambda$
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для всех матриц рассматриваемого пространства
4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всех $n \times n$ матриц A и соответствующих матриц B

Как видно из последнего свойства, норма матриц должна быть согласована с нормой вектора.
Наиболее распространенные нормы матриц:

$$\|A\|_I = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{II} = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

ПРИМЕР.

Для вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ и матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ вычислить различные нормы.

Решение.

$\|\bar{x}\|_I = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i| = max(|3|,|-4|) = 4$

$\|\bar{x}\|_{II} = \sum_{i=1}^{n}|x_i| = |3| + |-4| = 7$

$\|\bar{x}\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\|A\|_I = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}| = max(|-1| + |2|, |3| + |-5|) = 8$

$\|A\|_{II} = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}| = max(|-1| + |3|, |2| + |-5|) = 7$

$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$

Метод простых итераций.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Приведем систему к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

Эта система кратко может быть записана матричным уравнением $X = \alpha \cdot X + \beta$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Используя эту систему и выбрав начальную точку $X_0 = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, можно построить итерационную последовательность точек $X_0, X_1, \ldots X_k, \ldots.$ по формулам

$$X_k = \alpha \cdot X_{k-1} + \beta$$

Имеет место, следующее достаточное условие сходимости метода простых итераций.

Метод простых итераций $X_k = \alpha \cdot X_{k-1} + \beta$ сходится к единственному решению системы $X = \alpha \cdot X + \beta$ при любом начальном приближении X_0, если хотя бы одна из норм матрицы α меньше единицы $\|\alpha\|$<1.

При этом справедлива оценка погрешности $\|X_k - X_{k-1}\| \le \frac{\varepsilon(1-\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$,

где ε – заданная погрешность.

ПРИМЕР.

Методом простых итераций с погрешностью 0,001 решить СЛУ

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение.

Приведем СЛУ к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2 \\ x_2 = -0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}3 \\ x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}4 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = \alpha \cdot X + \beta$$

Найдем нормы матрицы α. Если хотя бы одна из норм матрицы α меньше единицы, то можно строить итерационный процесс, который сходится. Построим процесс при

$\|\alpha\|$= .33614

Строим итерационный процесс до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\|X_k - X_{k-1}\| \le \frac{\varepsilon(1-\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$$

Обозначим через P =$\|X_k - X_{k-1}\|$, а через $M = \frac{\varepsilon(1-\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$

В качестве X_0 выбирают любой вектор. Если нет никакой дополнительной информации о решении системы, за X_0 обычно принимают вектор свободных членов β .

Построение итерационного процесса можно осуществить в пакете Simintech в соответствии со следующим алгоритмом :

-задаем матрицу СЛАУ, вектор правых частей, погрешность решения, матрицу итерационной системы и вектор правых частей (1)-(5);

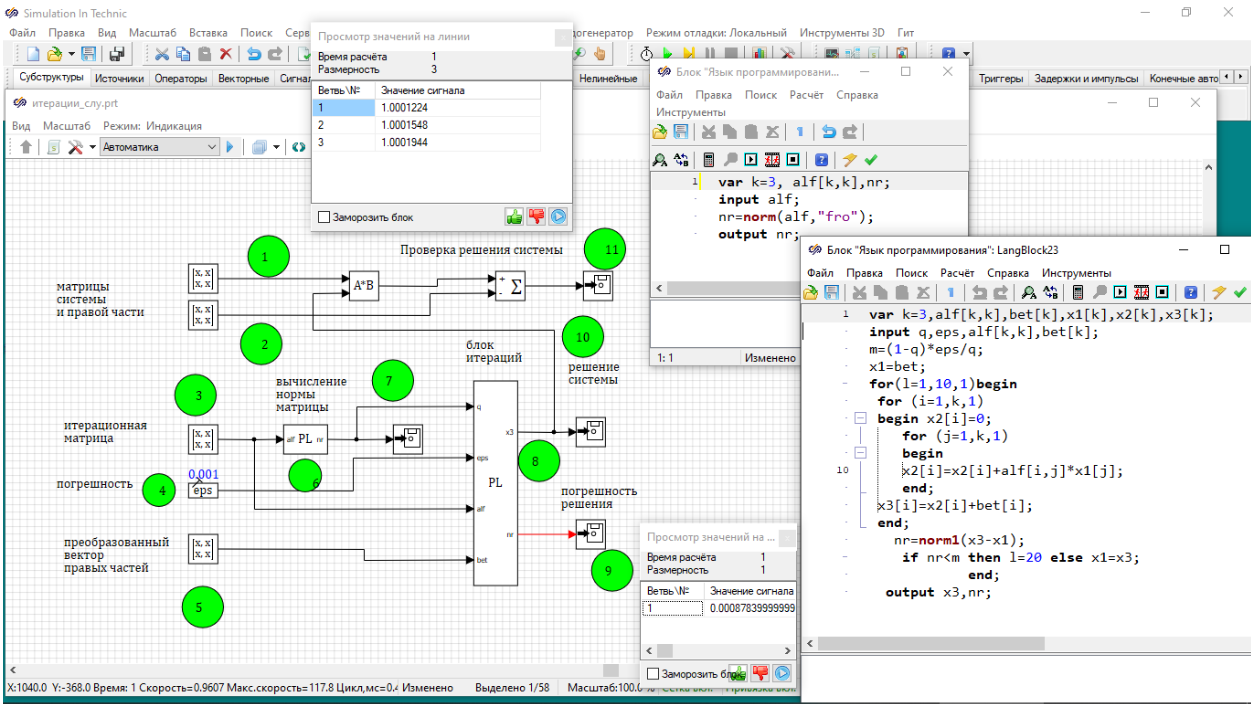
-создаем блок вычисления нормы итерационной матрицы (6) и файл значения нормы (7);

-формируем блок решения СЛАУ методом итераций (8) с остановкой итерационного процесса в соответствии с неравенством, приведенным выше ;

-норму разности решений на последнем шаге записываем в файл (9), решение в файл (10) и проверяем подстановкой в исходную систему уравнений по схеме (11).

Графическое изображение структурной схемы метода приведено ниже.

-



-

Полученный результат необходимо округлить в пределах затребованной точности:

$$x_1 = 1.000, x_2 = 1.000, x_3 = 1.000$$

Контрольное задание 1.

Методом прогонки решить СЛАУ.

Вариант1 $\begin{cases} -11x_1 - 9x_2 = -122 \\ 5x_1 - 15x_2 - 2x_3 = -48 \\ -8x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -14 \\ 8x_3 - 15x_4 + 4x_5 = -50 \\ 3x_4 + 6x_5 = 42 \end{cases}$	Вариант2 $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = -120 \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 = -91 \\ 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 5 \\ 5x_3 + 16x_4 - 4x_5 = -74 \\ -8x_4 + 16x_5 = -56 \end{cases}$
Вариант4 $\begin{cases} -14x_1 - 6x_2 = -78 \\ -9x_1 + 15x_2 - x_3 = -73 \\ x_2 - 11x_3 + x_4 = -38 \\ -7x_3 + 12x_4 + 3x_5 = 77 \\ 6x_4 - 7x_5 = 91 \end{cases}$	Вариант5 $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 48 \\ -5x_1 + 22x_2 + 8x_3 = 125 \\ -5x_2 - 11x_3 + x_4 = -43 \\ -9x_3 - 15x_4 + x_5 = 18 \\ x_4 + 7x_5 = -23 \end{cases}$
Вариант6 $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = -58 \\ -6x_1 + 16x_2 + 9x_3 = 161 \\ 9x_2 - 17x_3 - 3x_4 = -114 \\ 8x_3 + 22x_4 - 8x_5 = -90 \\ 6x_4 - 13x_5 = -55 \end{cases}$	Вариант7 $\begin{cases} 15x_1 + 8x_2 = 92 \\ 2x_1 - 15x_2 + 4x_3 = -84 \\ -4x_2 + 11x_3 + 5x_4 = -77 \\ -3x_3 + 16x_4 - 7x_5 = 15 \\ 3x_4 + 8x_5 = -11 \end{cases}$

Вариант8 $\begin{cases} -11x_1 - 8x_2 = 99 \\ 9x_1 - 17x_2 + x_3 = -75 \\ -4x_2 + 20x_3 + 9x_4 = 66 \\ -4x_3 - 14x_4 + 3x_5 = 54 \\ -6x_4 + 14x_5 = 8 \end{cases}$	Вариант9 $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 32 \\ -2x_1 + 12x_2 - 7x_3 = 15 \\ 2x_2 - 9x_3 + x_4 = -10 \\ -8x_3 + 17x_4 - 4x_5 = 133 \\ -7x_4 + 13x_5 = -76 \end{cases}$
Вариант10 $\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 = -75 \\ 6x_1 + 12x_2 = 126 \\ -3x_2 + 5x_3 = 13 \\ -9x_3 + 21x_4 + 8x_5 = -40 \\ -5x_4 - 6x_5 = -24 \end{cases}$	Вариант11 $\begin{cases} -10x_1 - 9x_2 = 7 \\ -5x_1 - 21x_2 - 8x_3 = 29 \\ 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 31 \\ 8x_4 + 2x_5 = 56 \\ 2x_4 + 10x_5 = -24 \end{cases}$
Вариант12 $\begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -114 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 81 \\ -2x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_3 - 14x_4 + 7x_5 = -38 \\ 8x_4 + 10x_5 = 144 \end{cases}$	Вариант13 $\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 = 125 \\ -8x_1 + 14x_2 + 6x_3 = -56 \\ -5x_2 - 17x_3 + 8x_4 = 144 \\ x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 36 \\ -4x_4 - 10x_5 = 70 \end{cases}$
Вариант14 $\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4 \\ 7x_1 - 17x_2 - 8x_3 = 132 \\ -9x_2 + 19x_3 + 8x_4 = -59 \\ 7x_3 - 20x_4 + 4x_5 = -193 \\ -4x_4 + 12x_5 = -40 \end{cases}$	Вариант15 $\begin{cases} 16x_1 - 8x_2 = 0 \\ -7x_1 - 16x_2 + 5x_3 = -123 \\ 4x_2 + 12x_3 + 3x_4 = -68 \\ -4x_3 + 12x_4 - 7x_5 = 104 \\ -x_4 + 7x_5 = 20 \end{cases}$
Вариант16 $\begin{cases} 18x_1 - 9x_2 = -81 \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 71 \\ -9x_2 + 21x_3 - 8x_4 = -39 \\ -4x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 64 \\ 7x_4 + 12x_5 = 3 \end{cases}$	Вариант17 $\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 = 51 \\ -x_1 + 13x_2 + 6x_3 = 100 \\ -9x_2 - 15x_3 - 4x_4 = -12 \\ -x_3 - 7x_4 + x_5 = 47 \\ 9x_4 - 18x_5 = -90 \end{cases}$
Вариант18 $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = -14 \\ 7x_1 - 19x_2 + 9x_3 = -55 \\ -4x_2 + 21x_3 - 8x_4 = 49 \\ 7x_3 - 23x_4 + 9x_5 = 86 \\ 4x_4 - 7x_5 = 8 \end{cases}$	Вариант19 $\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 16 \\ -8x_1 + 16x_2 + x_3 = -110 \\ 6x_2 - 16x_3 + 6x_4 = 24 \\ -8x_3 + 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ 5x_4 - 13x_5 = 87 \end{cases}$
Вариант20 $\begin{cases} -6x_1 + 6x_2 = 30 \\ 2x_1 + 10x_2 - 7x_3 = -31 \\ -8x_2 + 18x_3 + 9x_4 = 108 \\ 6x_3 - 17x_4 - 6x_5 = -114 \\ 9x_4 + 14x_5 = 124 \end{cases}$	Вариант21 $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 65 \\ -3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 23 \\ -2x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 1 \\ -2x_3 - 12x_4 - 8x_5 = -58 \\ -3x_4 - 10x_5 = -8 \end{cases}$

Вариант22	Вариант23
$\begin{cases} -14x_1 + 6x_2 = 82 \\ 2x_1 + 7x_2 = -51 \\ -7x_2 - 18x_3 - 9x_4 = -46 \\ 2x_3 - 18x_4 + 2x_5 = 111 \\ -7x_4 - 7x_5 = 35 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 38 \\ -6x_1 + 19x_2 - 9x_3 = 14 \\ 6x_2 - 18x_3 + 7x_4 = -45 \\ -7x_3 - 11x_4 - 2x_5 = 30 \\ 5x_4 - 7x_5 = 48 \end{cases}$
Вариант24	Вариант3
$\begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -117 \\ -9x_1 + 17x_2 + 6x_3 = -97 \\ 5x_2 + 20x_3 + 8x_4 = -6 \\ -6x_3 - 20x_4 + 7x_5 = 59 \\ 2x_4 + 8x_5 = -86 \end{cases}$	$\begin{cases} 12x_1 - 5x_2 = 148 \\ -3x_1 - 18x_2 - 8x_3 = 45 \\ -2x_2 - 16x_3 - 9x_4 = -155 \\ -4x_3 + 18x_4 - 7x_5 = 11 \\ 4x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

Контрольное задание 2.

Методом простых итераций с погрешностью 0,001 решить СЛУ. N - совпадает с номером Вашей фамилии в журнале.

$$\begin{cases} (24 + \frac{N}{2})x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 = -9 \\ -6x_1 - (27 + \frac{N}{3})x_2 - 8x_3 - 6x_4 = -76 \\ -4x_1 + 8x_2 + (19 + \frac{N}{4})x_3 + 6x_4 = -79 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - (13 + \frac{N}{5})x_4 = -70 \end{cases}$$

Контрольные вопросы.

1. К какому типу методов относится метод прогонки?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в методе прогонки?
3. Как строится итерационная последовательность для решения СЛАУ методом простой итерации?
4. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса?
5. Как оценить сходимость метода итераций для СЛАУ, если все нормы итерационной матрицы больше или равны единицы?
6. Оценить число операций, необходимых для получения решения, для метода Крамера, обратной матрицы, Гаусса, прогонки.
7. Как определить наличие плохо обусловленной СЛАУ?
8. Записать условие остановки итерационного процесса для СЛАУ.
9. Как СЛАУ привести к виду, удобному для создания итерационного процесса?
10. Записать итерационную процедуру схемы Зейделя для решения СЛАУ.