Лабораторная работа 2.

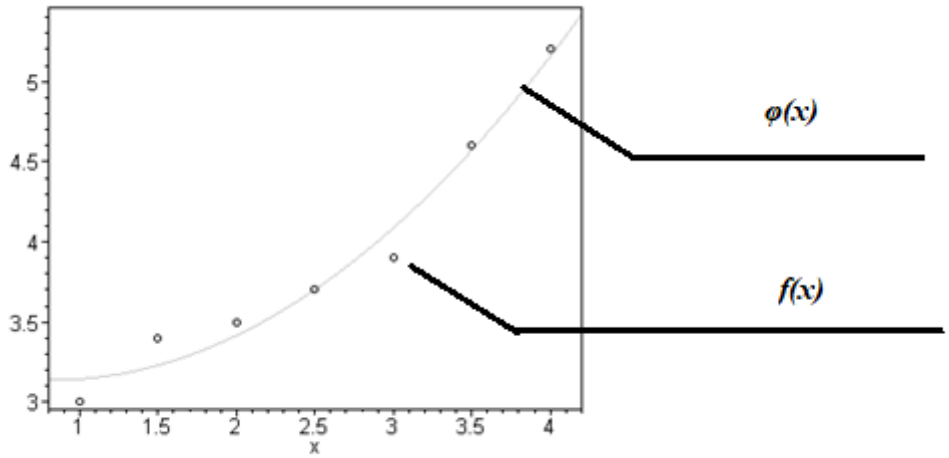
Аппроксимация по методу наименьших квадратов (МНК).

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Данные, получаемые экспериментально, известны с погрешностью измерений, то есть каждое реальное значение исследуемого процесса расположено в некотором интервале около экспериментального значения. К тому же экспериментальных данных бывает достаточно много и они очень «густо» расположены. В этом случае не рационально строить интерполяционный многочлен совпадающий с экспериментальными значениями. Можно строить аппроксимирующую функцию так, чтобы она наименее отклонялась от экспериментально полученной функции, причем в пределах погрешности эксперимента. При этом график функции проходит так, что он как можно меньше отклоняется от точек плоскости с координатами $(x_k; y_k)$, $k = 0...n$. Для достижения этой цели будем строить функцию *φ(x)* так чтобы величина отклонения S была наименьшей из всех возможных.

$S = \sum_{k=0}^{n} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 - \min$ ***f(x), φ(x)*** $\in$ **[a,b]** .



Поиск функции *φ(x)* обеспечивающей этот минимум, называют аппроксимацией по методу наименьших квадратов (МНК). Рассмотрим случай аппроксимации таблично заданной функции $y = f(x)$ полиномом $P_m(x)$ степени не выше *m:*

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots . + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

При аппроксимации функции по МНК нет зависимости между степенью полинома и количеством узловых точек таблицы. Полином по МНК подбирается так, чтобы минимизировать функцию $S = S(a_0,..., a_m) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - P_m(x_k))^2$. Эта функция есть не что иное, как сумма квадратов отклонений значений аппроксимирующего полинома от значений y_k аппроксимируемой функции в известных из таблицы точках x_k .

Функция $S(a_0...a_n)$ всегда больше или равна нуля. В соответствии с необходимыми условиями существования экстремума, если экстремум функции нескольких переменных существует, необходимо, чтобы все частные производные функции по её переменным равнялись нулю в точке экстремума. Если такая точка найдётся, то это - точка минимума, т.к. функция S неотрицательна. То есть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \\ \dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_0}(\sum_{k=0}^{n}(y_k - (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0))^2) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial a_1}(\sum_{k=0}^{n}(y_k - (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0))^2) = 0; \\ \dots \\ \dfrac{\partial}{\partial a_m}(\sum_{k=0}^{n}(y_k - (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0))^2) = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными относительно параметров $a_0, a_1, a_2, a_3, ...a_m$, получим конкретный вид полинома.
На практике эту систему для удобства преобразуют к виду

$$\begin{cases} a_0 \cdot s_0 + a_1 \cdot s_1 + ... + a_m \cdot s_m = t_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 \cdot s_m + a_1 \cdot s_{m+1} + ... + a_m \cdot s_{2m} = t_m \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

где $s_l = \sum_{l=0}^{n} x_i^l, l = 0, \dots, 2m, \qquad t_k = \sum_{i=0}^{n}(y_i x_i^k)\ \ k = 0, \dots, m$
и называют систему **(1)нормальной** системой МНК.

Задание №1

Для функции f(x) заданной таблично R = $\begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 3 & 3.5 & 3.9 & 4.6 \end{bmatrix}$

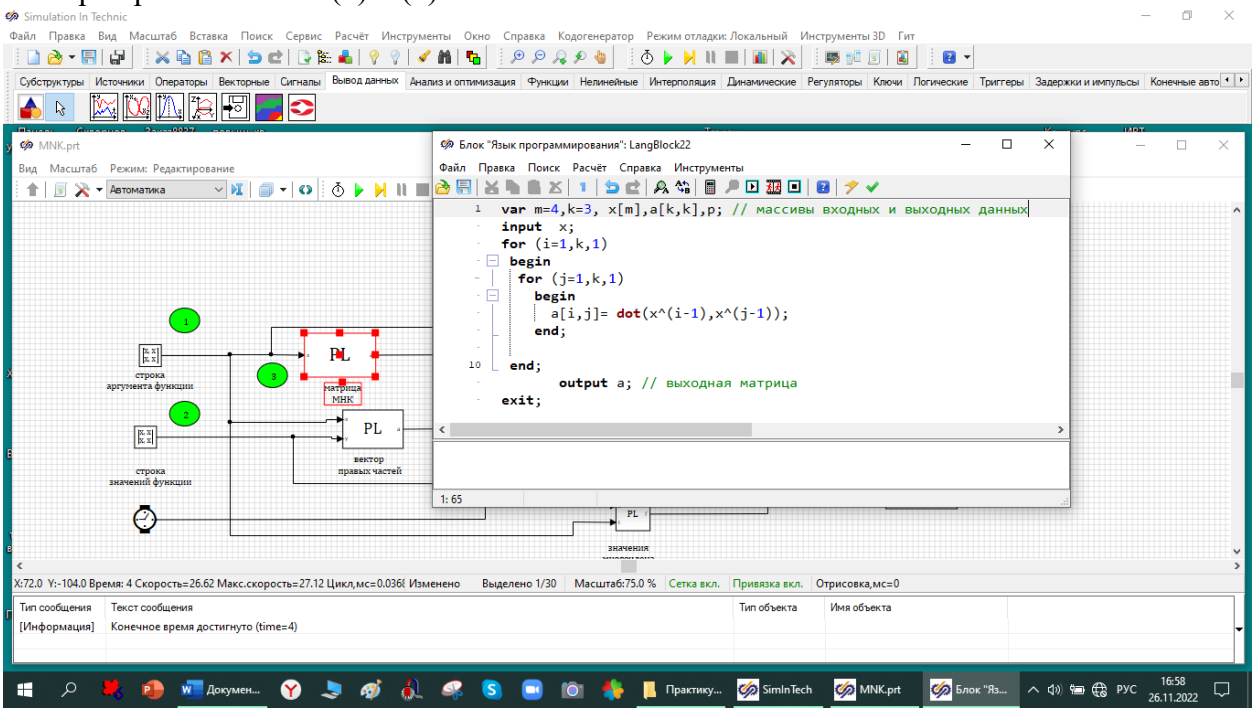
1) аппроксимировать ее многочленами второй степени и третьей степени;
2) на одном чертеже построить точечный график заданной функции и графики аппроксимирующих функций;
3) найти погрешность аппроксимации $\sqrt{S}$ для двух случаев аппроксимации в ручном режиме;
4) сделать вывод о наилучшей аппроксимации.

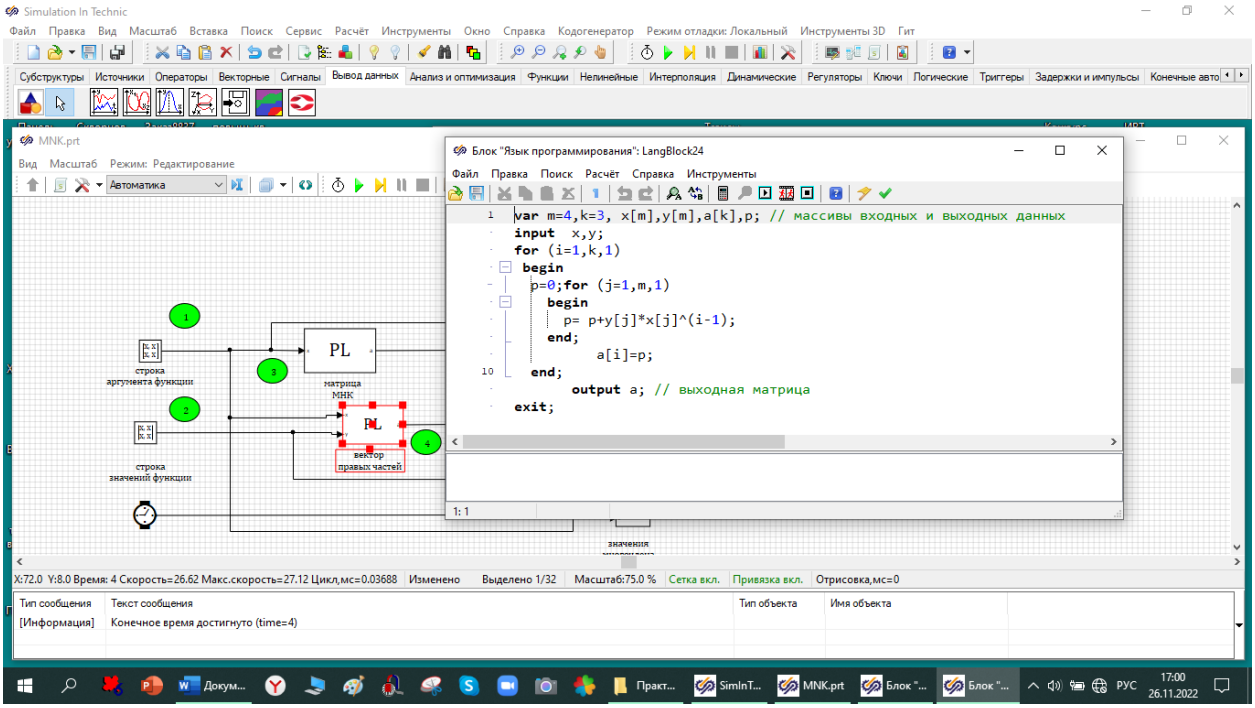
Решение.
1)Будем аппроксимировать f(x) многочленами второй и третьей степени вида:

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0,\ \ P_3(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0.$$

Для поиска неизвестных коэффициентов, решим систему **(1),** при условии $m = 2$ и $m = 3$. Предварительно в пакете Simintech по стандартному алгоритму организуем рабочее окно: новый проект-> электрические схемы (решатель – автоматика). В полученном окне из блока векторные воспользуемся «иконками» построения матриц произвольного вида для задания вектора узловых значений аргумента (1) и (2). Сформированные матрицы из портов вывода передаются на предварительно созданные и отлаженные блоки формирования коэффициентов матрицы левой части системы (1) и

вектора правых частей (3) и (4) соответственно:





Блоки «матрица МНК» и «Вектор правых частей» созданы и отлажены в разделе динамические «иконка» программирование в соответствии с требованиями пакета Simintech. Эти блоки формируют матрицы коэффициентов в соответствии с формулами

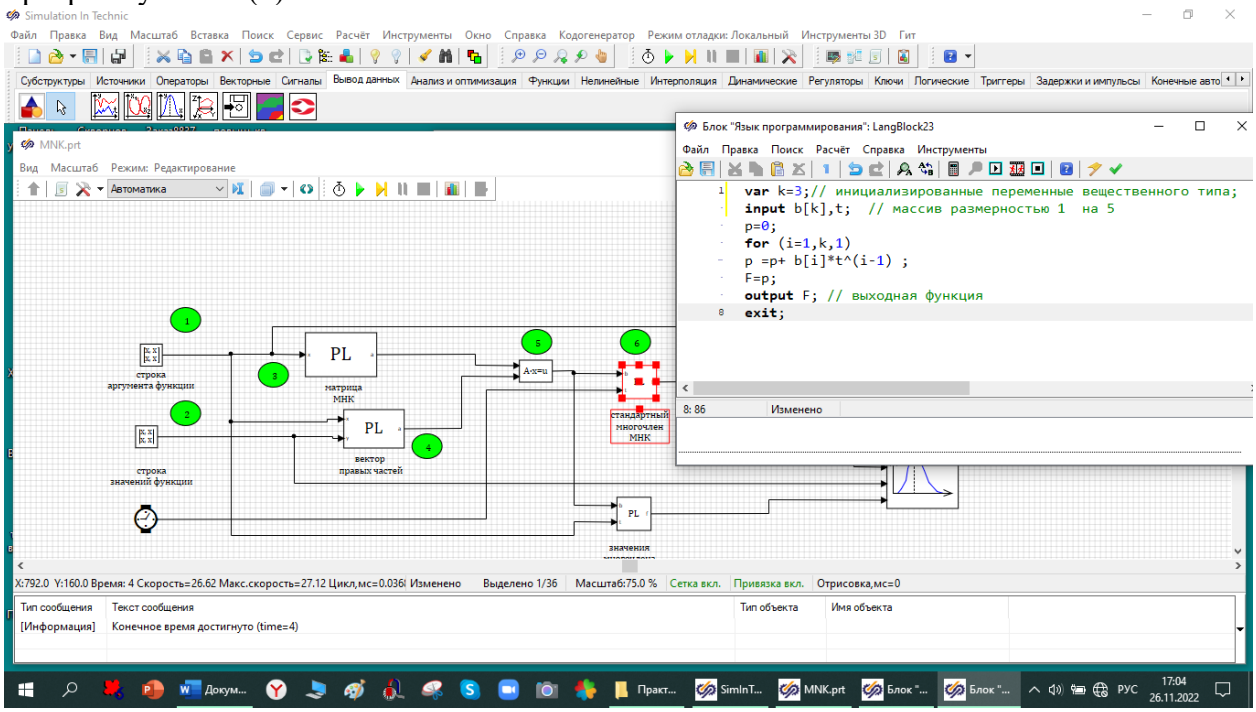
$$s_l = \sum_{i=0}^{n} x_i^l, l = 0, \ldots, 2m, \qquad t_k = \sum_{i=0}^{n} (y_i x_i^k) \;\; k = 0, \ldots, m.$$

Порты вывода блоков (1),(2), и ввода блоков (3),(4) соединяются связями как показано на рисунках.

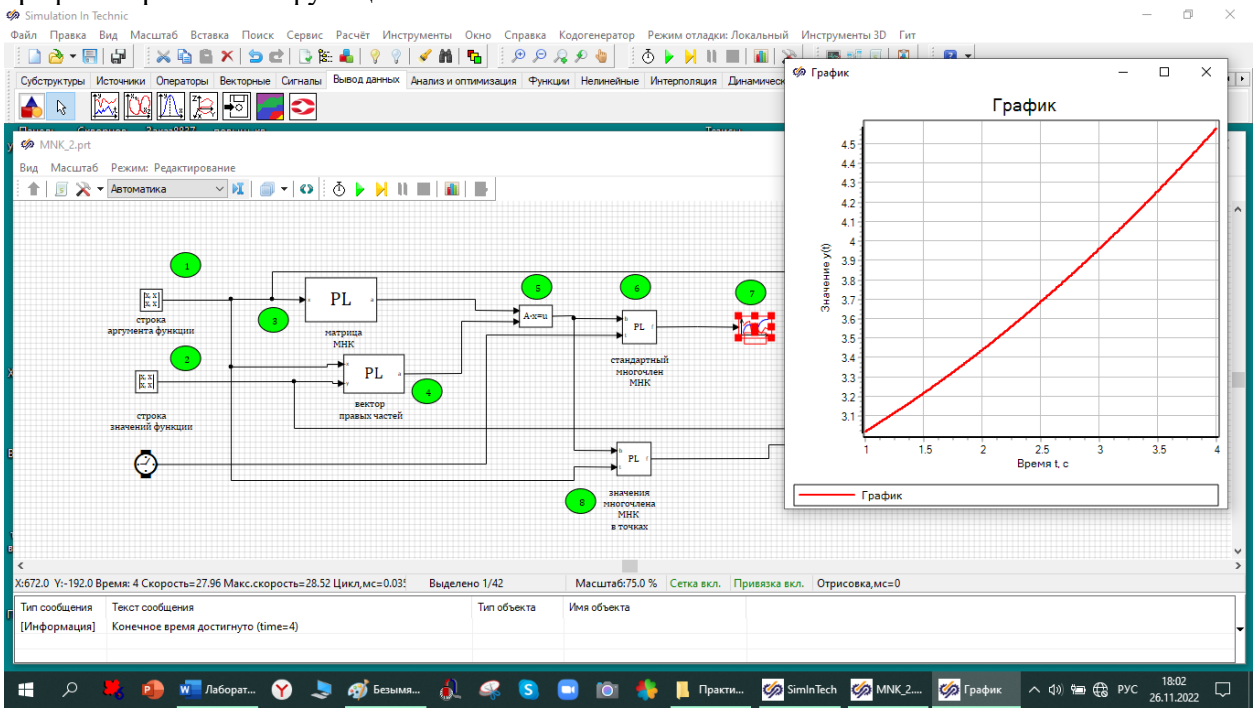
Для решения нормальной системы МНК вида

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 = t_1, \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 = t_2 \end{cases}$$

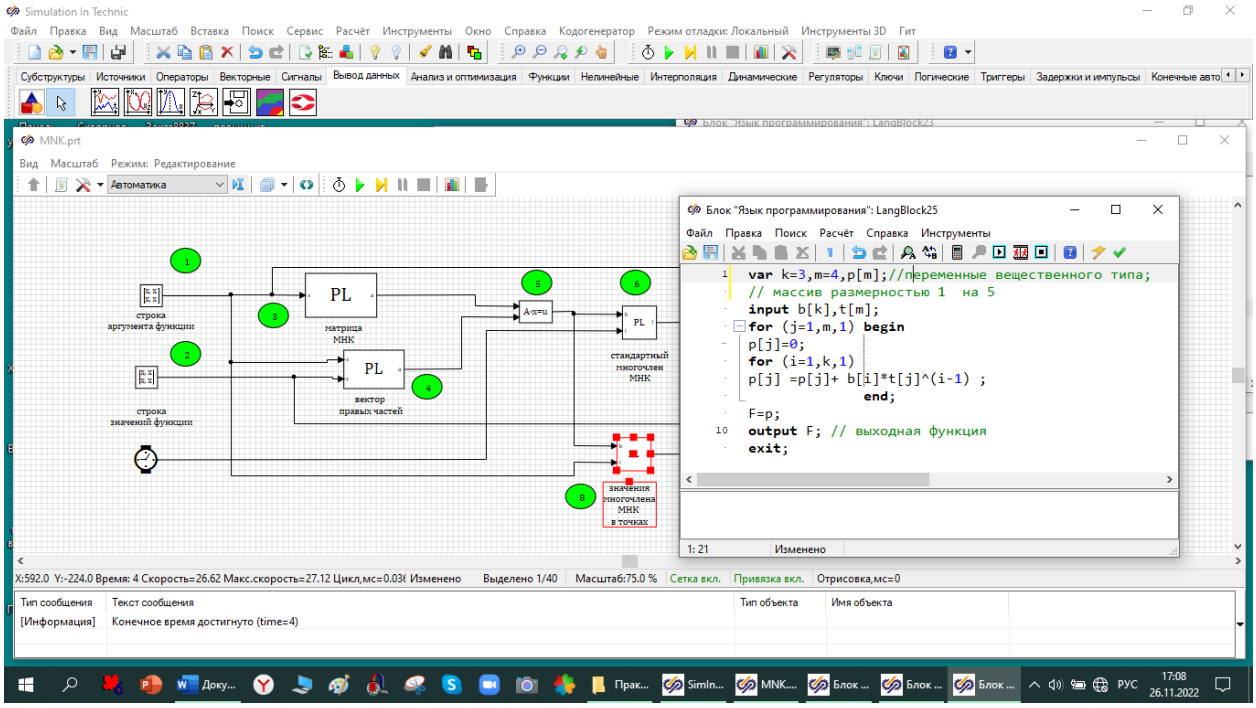
Воспользуемся разделом «векторные» основного окна из которого возьмем иконку «решение СЛУ» (5). На порты ввода блока (5) передадим данные портов вывода блоков (3) и (4). Для содания аппроксимирующего многочлена второй степени создадим программу блока (6):



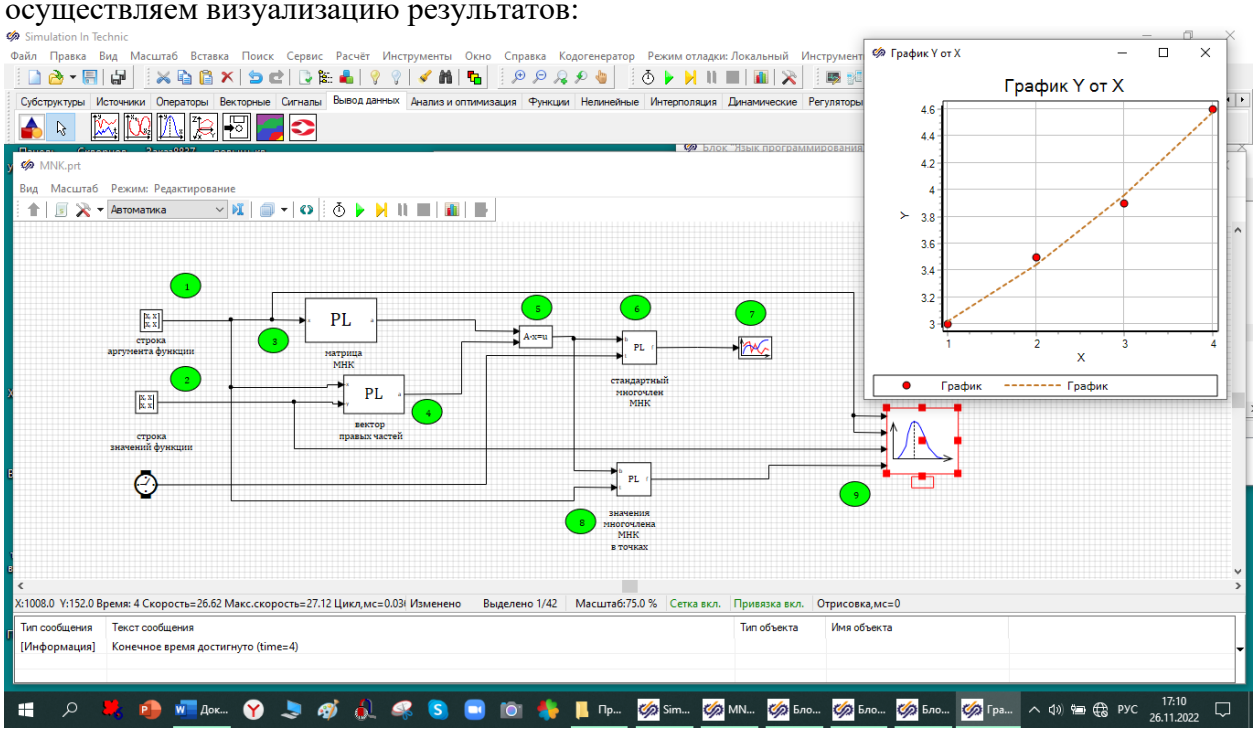
Блок (6) формирует аппроксимирующий многочлен второй степени по МНК. Его можно визуализировать при помощи стандартной программы раздела «вывод данных» «иконка» графики временных функций:



Для оценки отклонения аппроксимирующего многочлена от табличной функции построим графики этих функций в одной системе координат. Для этого сформируем и отладим блок вывода на печать значений аппроксимирующего многочлена в табличных узловых точках (8):



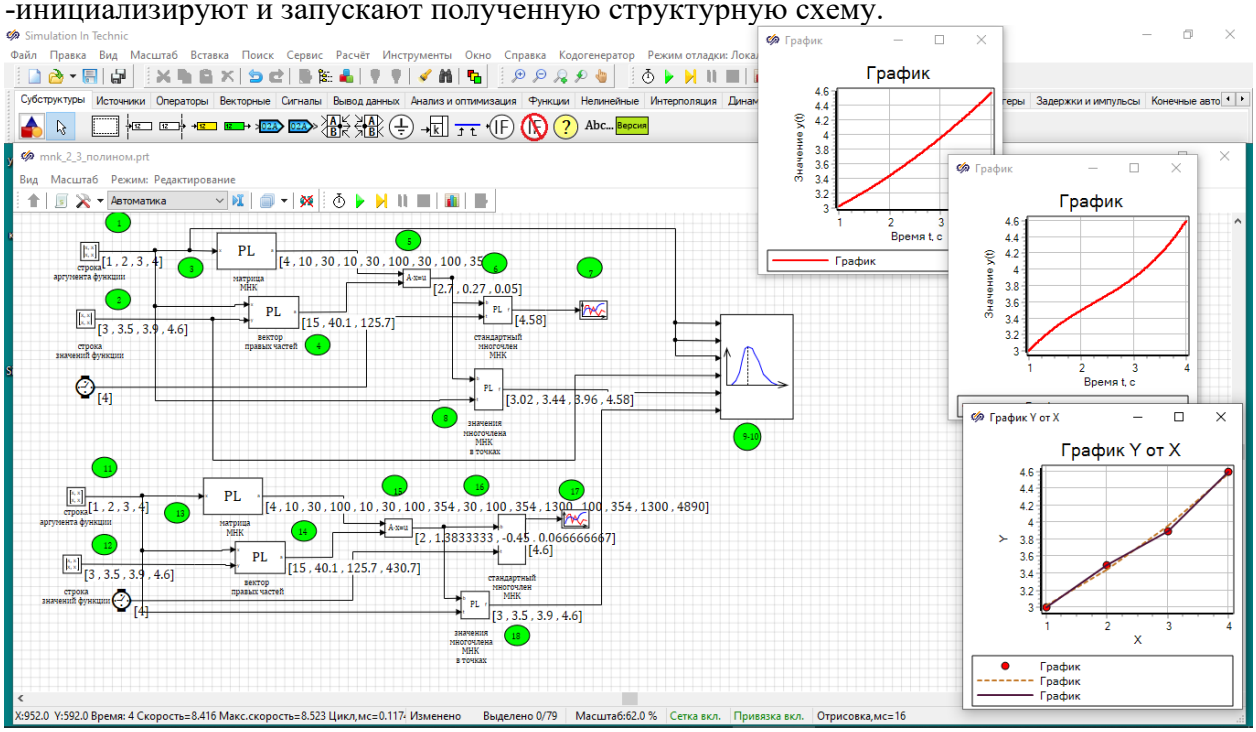
При помощи блока вывода данных «иконка» вывод графиков по координате (9-10) осуществляем визуализацию результатов:



Структурная схема получения многочлена второй степени по МНК.

Для построения аппроксимирующего многочлена третьей степени по МНК воспользуемся программой для многочлена второй степени, приведенной выше. В рабочем окне

Simintech с программой для многочлена второй степени скопируем структурную схему этой программы целиком. Вставим скопированную структурную схему ниже расположения скопированного объекта. Введем новую нумерацию блоков:
-(11),(12)-векторы данных, аналогичные (1),(2);
-(13),(14) -матрица СЛУ и вектора правых частей соответственно, в которых изменен параметр k на значение 4 для многочлена третьей степени;
-(15)-стандартный блок решения СЛУ из раздела «векторные» основного окна;
-(16)-блок формирования многочлена степени три, в программе требуется изменитьпараметр k на значение 4;
-(17) – блок вычисления значений многочлена в узлах таблицы;
- блок (9) в скопированном варианте удаляется вместе со связью с блоком (16);
-в блоке (9-10) через параметр свойства блока увеличивают число выводимых графиков до трех;
-связывают порты вывода и ввода схемы как показано на рисунке;
-инициализируют и запускают полученную структурную схему.



Структурная схема аппроксимации по МНК многочленами второй и третьей степени. Приведены графики многочлена второй и третьей степеней, а также совместный график всех рассматриваемых функций. Цифрами указаны значения в портах вывода. Многочлен третьей степени обладает лучшей аппроксимацией, чем многочлен второй степени, к тому же, как следовало ожидать, он является и интерполяционным. Проверка выводов на основании сравнения погрешностей подтверждает выводы на основе визуализации графиками:
- аппроксимирующий многочлен второй степени

$$P_2(x) = 0.05 \cdot x^2 + 0.27x + 2.7$$

Имеет ошибку аппроксимации, вычисленную в ручном режиме, вида

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (y_k - P_2(x_k))^2} = 0.0894;$$

- аппроксимирующий многочлен третьей степени

$$P_3(x) = 0.06(6) \cdot x^3 - 0.45 \cdot x^2 + 1.383(3)x + 2$$

имеет ошибку аппроксимации, вычисленную в ручном режиме, вида:

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (y_k - P_3(x_k))^2} = 0.$$

В пакете Simintech существует стандартный блок аппроксимации функций по методу наименьших квадратов. Его можно вызвать из раздела «Интерполяция» основного окна иконкой МНК-аппроксимация.

Контрольное задание№1

Функция f(x) задана таблично

$[x, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

$[y, 3 - .1\,n, 3.5 + .1\,n, 3.9 + .1\,n, 4.6 + .2\,n, 10.5 + .3\,n, 21.3 + .5\,n, 38.7 + .5\,n,$
$59.7 + n]$

где n - номер вашего варианта.

1) аппроксимировать ее многочленами второй и третьей степени.

2) на одном чертеже построить точечный график заданной функции и графики аппроксимирующих функций.

3) найти S.

4) сравнить результаты и выбрать лучшее приближение в смысле минимума среднеквадратического отклонения.

Контрольное задание№2

В качестве аппроксимирующих функций (в зависимости от характера точечного графика функции $y = f(x)$) часто используют следующие функции:

1) $y = A\,x^{\alpha}$ -степенная,

2) $y = A\,\mathrm{e}^{(\alpha\,x)}$ - показательная,

3) $y = \dfrac{1}{A\,x + B}$ - дробно-линейная,

4) $y = A\ln(x) + B$ - логарифмическая,

5) $y = \dfrac{A\,1}{x} + B$ - гиперболическая и другие.

Нахождение аппроксимирующей функции вида 1)-5) может быть сведено к нахождению параметров линейной функции. Идея заключается в следующем:

если таблица функции $y = f(x)$ такова, что аппроксимирующую функцию целесообразно искать в виде степенной функции

$$F(x) = A \cdot x^{\alpha} \quad (A>0),$$

то логарифмирование равенства дает выражение

$$\ln(\mathrm{F}(x)) = \ln(A) + \alpha\ln(x)\,.$$

Обозначив $a_1 = \alpha,\ a_0 = \ln(A)$ и $u = \ln(x)$, $P = \ln(F(x))$, получим, что $\ln(\mathrm{F}(x)) = \ln(A) + \alpha\ln(x) \Leftrightarrow P = a_1 u + a_0$, т.е. задача свелась к отысканию аппроксимирующей функции в виде полинома первой степени (линейной) $P = a_1 u + a_0$.

Практически нужно проделать следующее:

1. по заданной таблице значений функции $y = f(x)$ составить новую, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице;

2. по новой таблице найти a_1, a_0 использовав МНК для построения линейной функции;

3. используя обозначения $a_1 = \alpha, a_0 = \ln(A)$, найти α , A и подставить их в $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$.

Пример.

Функцию f(x) заданную таблично $K := \begin{bmatrix} x & 1.1 & 2.4 & 3.7 & 5.1 \\ y & .3 & 1.1 & 2.3 & 3.8 \end{bmatrix}$

аппроксимировать по МНК

1) прямой $P(x) = a_1 x + a_0$

2) степенной функцией $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$.

Решение.

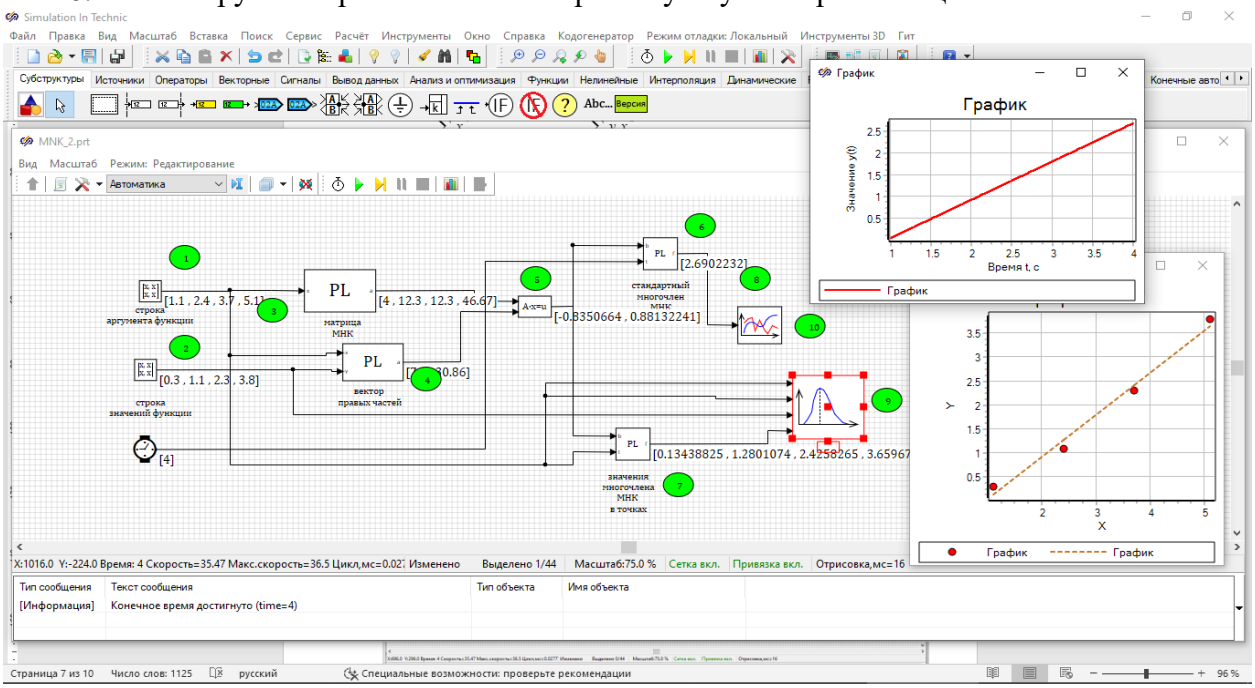
1) Значения параметров a_1, a_0 многочлена первой степени $P(x) = a_1 x + a_0$ находят из решения нормальной системы МНК

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 = t_1, \end{cases}$$

где $s_l = \dfrac{\sum_{i=0}^{3} x_i^{\,l}}{4}$ $l = 0,1,2$ $t_k = \dfrac{\sum_{i=0}^{3} y_i x_i^{\,k}}{4}$ $k = 0,1$.

1). Запишем и решим систему, используя пакет Simintech и программу задания 1 изменив параметр степени многочлена (порядок матриц) применив алгоритм:

1. Задаем векторы значений аргумента и функции (1), (2) ;
2. Формируем матрицу нормальной системы МНК (3) и вектор правых частей (4);
3. Решаем систему линейных уравнений МНК при помощи стандартного блока из раздела векторные «иконка» - решение СЛУ (5);
4. Полученные коэффициенты используем для формирования многочлена первой степени (6) и вычисления его значений (7);
5. Многочлен визуализируем стандартными программами (9) и (10) ;
6. Задаем векторы логарифмических значений аргумента и функции;
7. Повторяем п.п. 2, 3;
8. Полученные коэффициенты используем для формирования степенной функции;
9. Полученную функцию визуализируем стандартной программой;
10. Анализируем погрешности и выбираем лучшую аппроксимацию.



Структурная схема построения многочлена первой степени на базе программы задания 1.

На ней изображены и соединены связями порт вывода -> порт ввода:
- «иконки» ввода данных (1), (2) из раздела «векторные»:
-блоки формирования матрицы системы уравнений (3) и вектора правых частей (4), созданные при помощи «иконки программирования» раздела динамические;
-блок (5) решения СЛУ из раздела «векторные» с портами ввода – матрица системы и вектор правых частей и портом вывода – коэффициенты аппроксимирующего многочлена;
-программа формирования аппроксимирующего многочлена (6) на основе блока программирования раздела «динамические»;
-модуль вычисления значений многочлена МНК при заданных табличных аргументах (7);
-модуль вывода графика на печать из раздела «вывод данных» (8);
- модуль вывода на печать графика табличной и аппроксимирующей функций (9);
-примеры вывода на печать графиков, полученных после работы схемы (10);
-цифры под стрелками показывают значения «сигналов» на портах вывода блоков в результате работы программы.
При этом получен аппроксимирующий многочлен

$$P_1(x) = 0.88132241 \cdot x + 0.13438825.$$

Ошибка аппроксимации, вычисленная в ручном режиме, в этом случае составляет:

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (y_k - P_1(x_k))^2} = 0.30885.$$

2). При аппроксимации табличной f(x) при помощи степенной функции $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$, модифицируем вышеописанную схему пункта 1). С этой целью произведем логарифмирование степенной функции получив линейную функцию

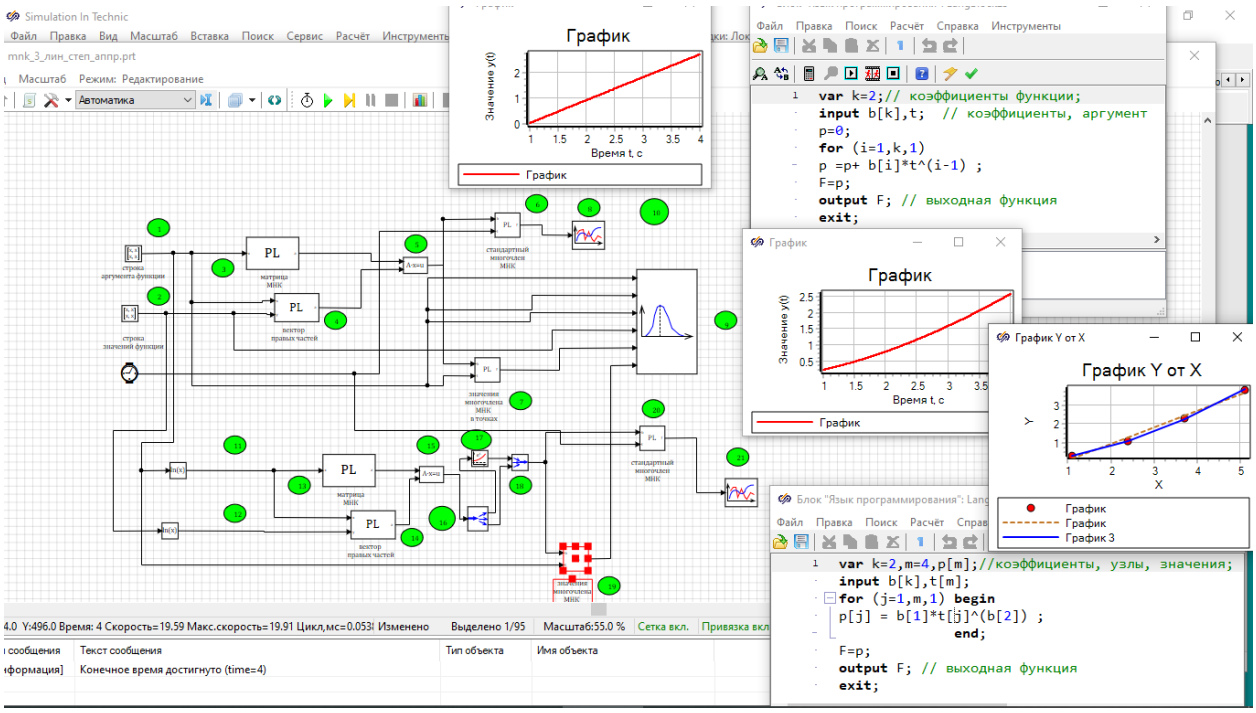
$$\ln\big(F(x)\big) = \ln(A) + \alpha \cdot \ln(x) \Leftrightarrow Y = a_1 X + a_0,$$

$$Y = \ln\big(F(x)\big), X = \ln(x), a_0 = \ln(A), a_1 = \alpha,$$

Откуда видно, что коэффициенты степенной функции и линейной связаны:

$$A = e^{a_0}, \alpha = a_1.$$

Значит для применения схемы пункта 1) выполним следующие действия:
-векторы данных (1) и (2) преобразуем в логарифмические, использовав блок «логарифма» из раздела функции и получив «логарифмические» векторы (11) и (12);
-введем блоки формирования матрицы системы уравнений (13) и вектора правых частей (14), созданные при помощи «иконки программирования» раздела динамические;
-решим полученную СЛУ стандартным блоком (15);
-вектор решений обработаем блоком «демультиплексор» (16) для получения координат вектора;
- коэффициент при первой степени многочлена – вторую координату оставим без изменений, а первую координату преобразуем экспоненциальной функцией (17);
-применим блок «мультиплексор» (18) для создания вектора входных данных при построении степенной функции;
-построим степенную функцию (19) и вычислим ее значения (20);
-сигнал из порта вывода (19) используем для построения графика в (9);
-сигнал из порта вывода (20) используем для построения графика степенной функции (21).



Структурная схема построения по МНК линейной и степенной функций.
Приведены графики линейной (8), степенной (21) и трех функций сразу (21).
При этом получен аппроксимирующая функция

$$P_\alpha(x) = 0.2569245 \cdot x^{1.6618775}.$$

Ошибка аппроксимации, вычисленная в ручном режиме, в этом случае составляет:

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (y_k - P_\alpha(x_k))^2} = 0.065757.$$

Очевидно, что аппроксимация степенной функцией точнее, чем аппроксимация линейной функцией, так как ошибка аппроксимации меньше. Это видно и визуально при сравнении графиков.

Контрольное задание №2

Функцию f(x) заданную таблично

$$\begin{bmatrix} x & 1.1+k & 1.7+k & 2.4+k & 3.0+k & 3.7+k & 4.5+k & 5.1+k & 5.8+k \\ y & .3+m & .6+m & 1.1+m & 1.7+m & 2.3+m & 3.0+m & 3.8+m & 4.6+m \end{bmatrix}, \text{ где}$$

$k = .01\,n$ и $m = .05\,n$, причем n - номер вашего варианта, аппроксимировать по МНК

1) прямой $F_1(x) = a_1 x + a_0$

2) степенной функцией $F_2(x) = A\,x^\alpha$.

3) на одном чертеже построить точечный график заданной функции и графики аппроксимирующих функций.

4) найти S.

5) сравнить результаты и выбрать лучшее приближение, в смысле минимума среднеквадратического отклонения.

Контрольные вопросы.

1. В чем суть аппроксимации таблично заданной функции по МНК? Чем отличается этот метод от метода интерполирования?

2. Каким образом сводится задача построения аппроксимирующих функций в виде различных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, гиперболической) к случаю линейной функции?
3. Можно ли при помощи МНК получить интерполяционный многочлен?
4. Как подбирать многочлен в МНК, чтобы он получился интерполяционным?
5. Что нужно сделать с табличными данными для аппроксимации степенной функцией по МНК с применением структурной схемы линейной аппроксимации по МНК?
6. Что нужно сделать с табличными данными для аппроксимации дробно-линейной функцией по МНК с применением структурной схемы линейной аппроксимации по МНК?
7. Что нужно сделать с табличными данными для аппроксимации логарифмической функцией по МНК с применением структурной схемы линейной аппроксимации по МНК?
8. Что нужно сделать с табличными данными для аппроксимации гиперболической функцией по МНК с применением структурной схемы линейной аппроксимации по МНК?