>

Практическое занятие

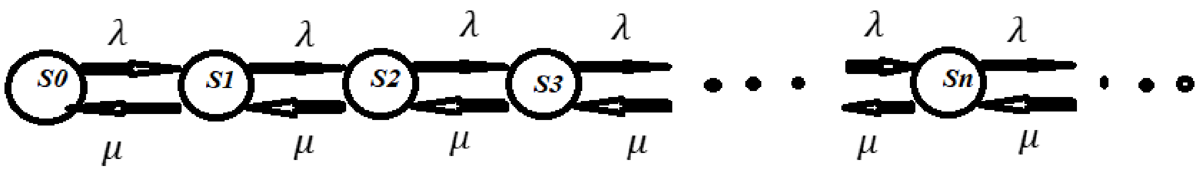
Системы массового обслуживания с неограниченной очередью,   с ожиданием в очереди, с отказами.

>

Задание 1.

Для одноканальной СМО с неограниченной очередью при интенсивности поступления заявок $\lambda := 2$ в час и интенсивности обслуживания $\mu := 3$ в час найти основные характеристики работы СМО.

Изображаем граф системы



В соответствии с графом задаем параметры системы и расчет системы начинаем с состояния S0.

Находим вероятность состояния S0 по формуле

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \cdots} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} ro^k}$$

```
> restart;lambda:=2;mu:=3;ro:=lambda/mu;Digits:=4:
```

$$\lambda := 2$$

$$\mu := 3$$

$$ro := \frac{2}{3}$$

Подсчет вероятности состояния без заявок S_0 и вероятностей состояний S_k $p_k = ro^k p_0$

```
> p0:=1/sum(ro^k,k=0..infinity);p[k]:=ro^k*p0;
```

$$p0 := \frac{1}{3}$$

$$p_k := \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Вычисление вероятности отказа заявке в обслуживании. Она очевидно должна равняться нулю, так как модель с бесконечной очередью.

>

```
> p[otk]:=limit(p[k],k=infinity);
```

$$p_{otk} := 0$$

Находим относительную пропускную способность (вероятность того, что заявка будет обслужена).

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания заявки)

```
> Q:=1-p[otk];
```

$$Q := 1$$

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в еденицу времени)

```
> A:=lambda*Q;
```

$$A := 2$$

\>

Среднее число занятых каналов и среднее число заявок под обслуживанием

```
> ksr:=A/mu;L[obs]:=ksr;
```

$$ksr := \frac{2}{3}$$

$$L_{obs} := \frac{2}{3}$$

Среднее число заявок в системе (математическое ожидание числа заявок $M[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$

```
>
> L[sis]:=sum('k*(ro^k)*p0',k=0..infinity);evalf(%);
```

$$L_{sis} := 2$$

$$2.$$

Среднее число заявок в очереди

```
> L[otc]:=L[sis]-L[obs];
```

$$L_{otc} := \frac{4}{3}$$

Проверка длины очереди(второй способ нахождения длины очереди как математическое ожидание числа заявок в очереди).

```
> L1[otc]:=sum('(k-1)*p[k]',k=2..infinity);evalf(%);
```

$$L1_{otc} := \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\, p_k$$

$$1.333$$

Так как среднее число заявок в очереди, посчитанное двумя способами, совпадает, то polсчет характеристик произведен верно.

Найдем среднее время нахождения заявки в системе, под обслуживанием и в очереди по формулам Литтла $W = \frac{L}{\lambda}$

\>

```
W[sis]:=L[sis]/lambda;W[obs]:=L[obs]/lambda;W[otc]:=L[otc]/lambda;
```

$$W_{sis} := 1$$

$$W_{obs} := \frac{1}{3}$$

$$W_{otc} := \frac{2}{3}$$

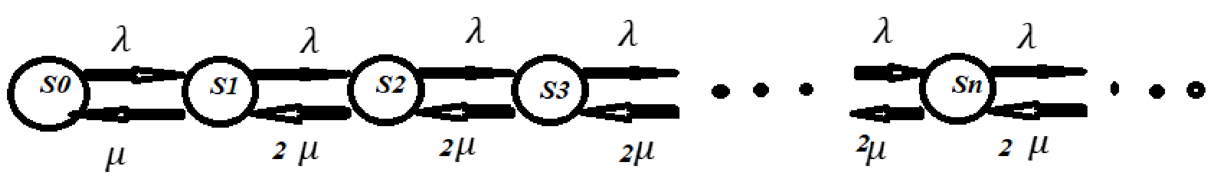
>То есть при данных условиях заявка в системе находится 1 час, под обслуживанием 20 мин, в очереди 40 мин.

Эти данные могут быть использованы при исследовании СМО рассматриваемого вида.

>

Задание 2.

Для двухканальной СМО с неограниченной очередью при интенсивности поступления заявок $\lambda := 3$ в час и среднем времени обслуживания заявки Tobs= 20 мин начертить граф СМО и найти основные характеристики работы СМО.



Теперь, в силу графа, интенсивность обслуживания заявок в два раза больше, так как число каналов 2. Но заявки в очереди попадают под обслуживание, если освовободится какой-то из каналов. Поэтому заявки в очереди обслуживаются тоже с интегсивностью 2μ .

Ниже приведена программа для заданного графа. Обратите внимание, что все параметры должны быть приведены к одним еденицам.

```
> restart;lambda:=3;mu:=1/20*60;ro:=lambda/mu/2;Digits:=4:
```

$$\lambda := 3$$

$$\mu := 3$$

$$ro := \frac{1}{2}$$

```
>p0:=1/(1+lambda/mu+(lambda/mu)^2/2!+(lambda/mu)^2/2!*sum(ro^k,k=1.
.infinity));#Вероятность состояния S0
p[1]:=lambda/mu*p0;#Вероятность состояния S1
p[2]:=lambda/mu/2*p[1];#Вероятность состояния S2
p[3]:=lambda/mu/2*p[2];#Вероятность состояния S3
p[k]:=ro^(k-3)*p[3];#Вероятность состояния Sk для к=4,5,6,...
```

$$p0 := \frac{1}{3}$$

$$p_1 := \frac{1}{3}$$

$$p_2 := \frac{1}{6}$$

$$p_3 := \frac{1}{12}$$

$$p_k := \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-3)}$$

Вычисление вероятности отказа заявке в обслуживании

```
>
> p[otk]:=limit(p[k],k=infinity);
```

$$p_{otk} := 0$$

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания заявки)

```
> Q:=1-p[otk];
```

$$Q := 1$$

Абсолютная пропускная спсобность (среднее число заявок, обслуживаемых в еденицу времени)

```
> A:=lambda*Q;
```

$$A := 3$$

```
>
```

Среднее число занятых каналов и среднее число заявок под обслуживанием

```
> ksr:=A/mu;L[obs]:=ksr;
```

$$ksr := 1$$

$$L_{obs} := 1$$

Среднее число заявок в системе

```
> L[sis]:=1*p[1]+2*p[2]+sum('k*p[k]',k=3..infinity);evalf(%);
```

$$L_{sis} := \frac{2}{3} + \left(\sum_{k=3}^{\infty} k\, p_k\right)$$

$$1.333$$

Среднее число заявок в очереди

```
> L[otc]:=L[sis]-L[obs];
```

$$L_{otc} := \frac{1}{3}$$

Проверка длины очереди(второй способ)

```
> L1[otc]:=sum('(k-2)*p[k]',k=3..infinity);evalf(%);
```

$$L1_{otc} := \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)\, p_k$$

$$.3333$$

Так как среднее число заявок в очереди, посчитанное двумя способами, совпадает, то пожсчет характеристик произведен верно.

Среднее время нахождения заявки в системе, под обслуживанием и в очереди по формуле Литтла

>

```
W[sis]:=L[sis]/lambda;W[obs]:=L[obs]/lambda;W[otc]:=L[otc]/lambda;
```

>

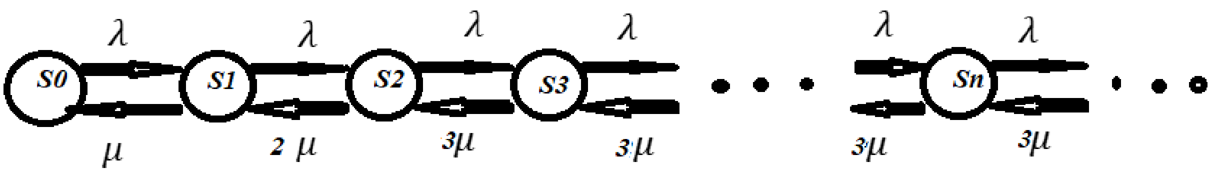
$$W_{sis} := \frac{4}{9}$$

$$W_{obs} := \frac{1}{3}$$

$$W_{otc} := \frac{1}{9}$$

Задание 3.

Для трехканальной СМО с неограниченной очередью при интенсивности поступления заявок $\lambda := 6$ в час и среднем времени обслуживания заявки Tobs= 15 мин начертить граф СМО и найти основные характеристики работы СМО.



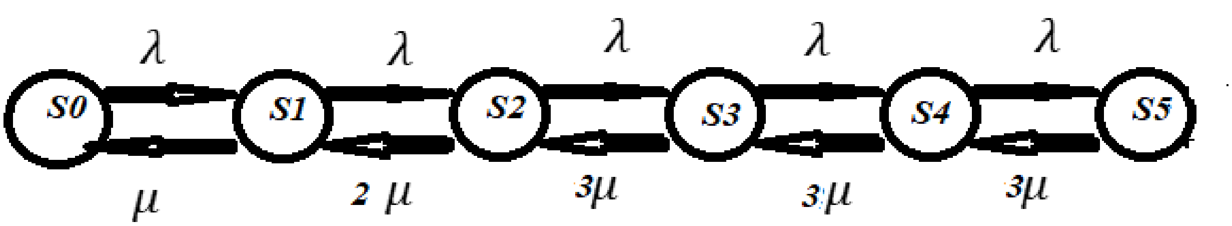
>

>

Задание 4.

Для трехканальной системы с двумя местами в очереди при интенсивности поступления заявок $\lambda := 2$ и интенсивности обслуживания $\mu := 3$ начертить граф СМО и найти основные характеристики работы СМО.

Теперь имеем систему с ограниченной очередью. Граф этой системы имеет вид



В соотвествии с графом с использованием формул для систем размножения - гибели в случае пуассоновских потоков событий имеем

> `restart;lambda:=2;mu:=3;ro:=lambda/mu;Digits:=4:`

$$\lambda := 2$$

$$\mu := 3$$

$$ro := \frac{2}{3}$$

```
> p0:=1/(1.+ro+ro^2/2!+ro^3/3!+ro^4/3!/3+ro^5/3!/(3^2));
p1:=p0*ro/1;
p2:=p1*ro/2;
p3:=p2*ro/3;
p4:=p3*ro/3;
p5:=p4*ro/3;
p0+p1+p2+p3+p4+p5;# проверка правильности нахожления вероятностей
```

$$p0 := .5126$$

$$p1 := .3417$$

$$p2 := .1139$$

$$p3 := .02531$$

$$p4 := .005623$$

$$p5 := .001250$$

$$1.000$$

```
> p[otk]:=p0*lambda^5/(mu^5)/3!/(3^2);
```

$$p_{otk} := .001250$$

```
> Q:=1-p[otk];
```

$$Q := .9988$$

```
> A:=lambda*Q;
```

$$A := 1.998$$

```
> ksr:=A/mu;L[obs]:=ksr;
```

$$ksr := .6660$$

$$L_{obs} := .6660$$

```
> L[sis]:=0*p0+1*p1+2*p2+3*p3+4*p4+5*p5;
```

$$L_{sis} := .6742$$

```
> L[otc]:=L[sis]-L[obs];
```

$$L_{otc} := .0082$$

Второй способ вычисления среднего числа заявок в очереди

```
> L1[otc]:=1*p4+2*p5;
```

$$L1_{otc} := .008123$$

```
>
W[sis]:=L[sis]/lambda;W[obs]:=L[obs]/lambda;W[otc]:=L[otc]/lambda;
```

$$W_{sis} := .3371$$

$$W_{obs} := .3330$$

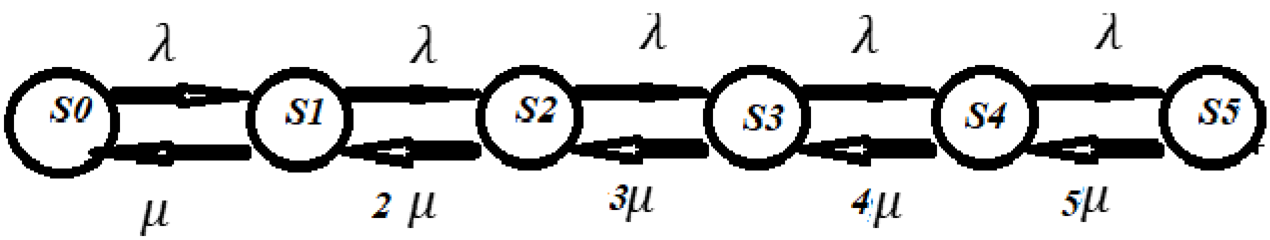
$$W_{otc} := .004100$$

>

Задание 5.

При тех же условиях, что и в задаче 5 рассчитать характеристики СМО, заменив места в очереди каналами обслуживания. Сравнить эффективность работы СМО задач 5 и 6 считая, что общее время работы 24 часа, состояние S0 убыточно с 10 у.е./час, доход канала обслуживания равен 5 у.е. в час, а место в очереди убыточно с 1 у.е.в час.

В данном случае имеется СМО с отказами. Граф этой системы имеет вид.



Все расчеты проводятся как и в задаче 4, только с учетом графа системы.