

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФИЛИАЛ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"
в г. Смоленске**

В.Н. ДЕНИСОВ, С.П. КУРИЛИН

**МАТРИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ**

Учебное пособие

Смоленск 2011

УДК 621.313.3

Д 33

Допущено УМО вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 140601 - "Электромеханика" направления подготовки 140600 - "Электротехника, электромеханика, электротехнологии".

Подготовлено на кафедре электромеханических систем
и кафедре высшей математики
филиала ГОУВПО "МЭИ (ТУ)" в г. Смоленске

Рецензент д.т.н., профессор, директор ООО "Системы и приборы автоматики"
А.Е. МАЛИНОВСКИЙ

Д 33 **Денисов В.Н., Курилин С.П.** Матричное моделирование электромагнитных и энергетических процессов в электрических машинах [Текст]: учебное пособие / В.Н. Денисов, С.П. Курилин; под ред. В.Н. Денисова. – Смоленск: РИО филиала ГОУВПО "МЭИ (ТУ)" в г. Смоленске, 2011. – 140 с.

В пособии изложены энергетические аспекты электромеханического преобразования энергии с позиций анализа топологических свойств параметрических матриц электрических машин, дано описание общих свойств математических моделей электромеханических объектов. Проанализированы топологические свойства параметрических матриц электрических машин, на их базе дано описание электромагнитных и энергетических процессов, сформулирована концепция рационального питания электрических машин. Ряд положений пособия излагается на основе визуальных моделей потоков мощности машины. Пособие снабжено расчетными примерами и контрольными вопросами по отдельным темам.

© Московский энергетический институт, филиал в г. Смоленске, 2011
© Денисов В.Н., 2011
© Курилин С.П., 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит изложение матрично-топологических аспектов электромеханического преобразования энергии. Их совокупность образует концепцию электрической машины как линейного оператора простой структуры. Следует отметить, что подобный взгляд авторов является новым для отечественной учебной литературы. Он представляется чрезвычайно важным для формирования у студентов системных представлений об электрической машине.

Изложение материала базируется на теории векторных пространств, матриц и квадратичных форм, положения которой знакомы студентам-электромеханикам по курсу «Математика» в соответствии с государственным образовательным стандартом. Вместе с тем, наиболее существенные положения данных разделов математики приводятся в первой главе пособия в сочетании с их физической трактовкой. Это позволяет читателю наполнить физическим смыслом ранее абстрактные математические теоремы.

В предлагаемой работе, в отличие от известной работы Н. Хенкока, матричное исчисление использовано для исследования топологических свойств электрической машины. Авторам удалось осуществить анализ энергетических процессов в тесной связи со структурными свойствами параметрической матрицы машины. В частности, преобразования токов в электрической машине связываются с преобразованиями координат векторов пространства. При этом показано, что любая матрица машины, осуществляя преобразование координат вектора тока, формирует поле мощности симметрично главным осям своей параметрической матрицы.

В пособии формулируется и иллюстрируется примерами принцип рационального питания электрической машины, вводятся новые понятия продольного и поперечного энергообмена. Кроме того, приводятся методики визуализации энергетических процессов. Пособие снабжено достаточным числом расчетных примеров и иллюстраций, позволяющих глубже понять закономерности электромеханического преобразования энергии.

Материал данного учебного пособия будет полезен не только студентам-электромеханикам, но и студентам, специализирующимся в области электропривода, электроэнергетики и энергосбережения. Он также может быть полезен инженерно-техническим работникам, аспирантам и преподавателям электроэнергетических специальностей.

Заслуженный деятель науки
Российской Федерации, доктор
технических наук, профессор Ф.А. Мамедов

ВВЕДЕНИЕ

В период 1967 – 1978 годов были опубликованы работы Н. Хэнкока и Г. Крона [1 - 3], по векторно-матричному и тензорному анализу сложных систем, к числу которых относится и электрическая машина. В 1985 году вышла работа А.Е. Петрова на ту же тему [4]. Среди более поздних публикаций следует отметить работы В.И. Арнольда, Б.А. Хесина и А.Д. Артыма [5 - 8]. Данные работы заложили в отечественной научной школе основы топологической теории систем и матричной теории электрических машин.

В предлагаемом вниманию читателей издании обобщены результаты научных работ авторов по данному направлению, относящихся к 2002 – 2011 годам [20 – 33, 35 – 41, 44, 45]. Основу пособия составили конспекты лекций по дисциплинам "Математические и программные средства моделирования", "Математическое моделирование электромагнитных и энергетических процессов в электромеханических преобразователях энергии" для студентов 4 – 5 курсов направления "Электротехника, электромеханика и электротехнологии", а также лекций по дисциплине "Дополнительные главы математики" для студентов магистерской программы "Методы исследования и моделирования процессов в электромеханических преобразователях энергии", читаемых авторами в Смоленском филиале МЭИ.

В учебном пособии излагаются топологические аспекты процесса электромеханического преобразования энергии, реализуемого электрическими машинами. Как правило, под электрической машиной (ЭМ) подразумевается неявноплюсовая машина переменного тока. Применительно к этому объекту обсуждаются и развиваются идеи вышеперечисленных авторов. Вместе с тем, в свойствах параметрических матриц асинхронных и синхронных машин, трансформаторов, машин постоянного тока, многофазных электрических и магнитных цепей много общего. Эта общность позволяет распространять полученные выводы и на более широкую группу объектов. Так, явления связанные с взаимной зависимостью элементов структуры объекта (элементами структуры многофазных цепей и электрических машин являются фазы) наблюдаются во многих электротехнических объектах. Приведем наиболее известные из них:

- уравнивающие токи в параллельно включенных трансформаторах, генераторах постоянного тока, якорных обмотках машин постоянного тока;
- высшие гармоники тока или магнитного потока в насыщенных трансформаторах;
- генерация высших гармоник электромагнитных величин несимметричными электрическими машинами;
- генерация дополнительных (отсутствующих у источника питания), симметричных составляющих несимметричными электрическими и магнитными цепями;
- реактивный момент явнополусной синхронной машины.

Сами по себе эти явления знакомы читателю по общему курсу электрических машин [11 – 14]. Вместе с тем, взгляд на них, как на различные

проявления одних и тех же структурных свойств объекта, исключительно важен с точки зрения формирования системных представлений об ЭМ. С этой точки зрения все вышеперечисленные эффекты представляют собой проявления параметрической неоднородности структуры, природа которой (электрическая, магнитная, комбинированная и проч.) для понимания системных свойств не очень существенна. Среди немногих работ по данной проблематике следует упомянуть работы В.А. Тафта, в частности, [9].

Как объект физического мира электрическая машина имеет конструктивные, технологические, энергетические и иные свойства, которые позволяют её так или иначе классифицировать, относить к тому или иному классу. Классообразующими признаками выступают общие черты всех представителей класса. Собранные вместе и формализованные в виде структуры или (и) математических выражений эти черты образуют структурно-логическую или математическую модель определённого класса ЭМ.

Математическая модель ЭМ, описывающая электромеханическое преобразование энергии представляет собой векторно-матричное выражение, в котором параметрическая матрица ЭМ играет роль оператора преобразования "вектор тока" – "вектор напряжения". Модель позволяет классифицировать ЭМ в отношении электромеханического преобразования энергии как линейный оператор простой структуры. В этой классификации зафиксированы топологические свойства всех ЭМ. Более того, объекты типа "электрическая машина" составляют лишь небольшую группу (подкласс) класса линейных операторов.

Ниже, в качестве иллюстрации топологических аспектов теории электрических машин, приводятся три примера. Их содержание будет понятно читателю, знакомому с общим курсом электрических машин. Вместе с тем, дать аргументированные ответы на поставленные в них вопросы очень трудно или даже невозможно без обращения к топологической теории.

Пример 1. Что такое симметричные составляющие тока обмотки трансформатора или ЭМ? Почему формальное математическое разложение по методу симметричных составляющих выделяет в отдельные составляющие токи, обладающие разными физическими свойствами? Напомним читателю, что физические, в частности – параметрические и энергетические, свойства токов прямой, обратной и нулевой последовательности у вращающейся машины различны. Здесь можно было бы говорить о формах электромагнитного поля фаз и результирующего поля машины, о вращении ротора «по полю» и «против поля». Далее следовало бы уточнить, какой смысл имеет термин «вращающееся поле», при различных формах полей фаз (как это имеет место у линейных ЭМ). Далее поговорить о параметрах ротора и их зависимости от скольжения, но так и не получить ответа на поставленный вопрос. Каким образом вся эта информация передается в метод симметричных составляющих? Топологическая теория дает простой и ясный ответ. Метод симметричных составляющих не является формальным (умозрительным) для электрической машины. Он является каноническим. Это означает, что метод «зашит» в параметрические матрицы машины, и она физически осуществляет преобразование

симметричных составляющих, разделяя токи и энергетические потоки на компоненты, пропорциональные собственным числам этих матриц. Преобразование осуществляется независимо от того, существует ли метод симметричных составляющих как математическая технология или нет.

Пример 2. Задача о приводимости ЭМ. Под приводимостью будем понимать возможность замещения m -фазной машины набором из m независимых эквивалентных фаз. Известно, что симметричная машина с симметричными токами приводима. Проектировщики и расчетчики оперируют схемой замещения одной эквивалентной фазы, а затем увеличивают её мощность в m раз. Приводима ли несимметричная машина? По существу, здесь необходимо ответить на вопрос - приводима ли параметрическая матрица ЭМ к диагональному виду. Ответ на него зависит от того, к какому классу матриц она принадлежит.

Пример 3. Задача об эквивалентировании ЭМ. Она является обобщением задачи о приводимости. Сколькими независимыми подсистемами может быть эквивалентно (в смысле мощности) замещена m -фазная ЭМ? Каждая независимая подсистема может включать в себя эквивалентные однофазные обмотки (статора и ротора), эквивалентные двухфазные обмотки (статора и ротора), эквивалентные трехфазные обмотки (статора и ротора) и так далее. В практике моделирования трехфазных симметричных машин широко распространен прием их замены двумя независимыми подсистемами. В первую входят двухфазные обмотки статора и ротора, в которых локализованы электромагнитные величины прямой и обратной последовательности. Во вторую входят однофазные обмотки, локализуемые величины нулевой последовательности (см., например, [11], гл. 69). А как обстоит дело в общем случае m -фазной несимметричной машины? Без ответа на этот вопрос невозможно корректно построить её математическую модель. Топологическая теория его дает: количество независимых подсистем совпадает с количеством независимых подпространств параметрической матрицы ЭМ, а числа фаз эквивалентных обмоток совпадают с размерностями соответствующих подпространств. Если параметрическая матрица ЭМ не имеет хотя бы одного подпространства с размерностью 2 (то есть плоскости), ни о какой её замене двухфазным эквивалентом не может быть и речи.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, насколько важным и в теоретическом, и в прикладном отношении является изучение структурно-топологических свойств ЭМ. Готовя к печати данное учебное пособие, авторы ставили перед собой цель познакомить читателей с наиболее существенными аспектами топологической теории электрических машин.

1 ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ

Ниже, в качестве математических основ теории электромагнитных и энергетических процессов в ЭМ, приводятся сведения из теории матриц и теории квадратичных форм [17 – 19], необходимые для понимания материала последующих разделов учебного пособия. Приводятся доказательства выводов, на которые далее опираются авторы. В ряде случаев дается физическая трактовка положений и теорем раздела. Кроме того, приводятся результаты практических расчётов. Эти обстоятельства позволяют авторам рекомендовать читателю не пропускать этот раздел даже в случае хорошего знакомства с линейной алгеброй и теорией квадратичных форм.

1.1 Линейные пространства, базис, линейные операторы

1.1.1 Математическая модель ЭМ

Математической моделью, описывающей электромагнитные процессы в ЭМ, является векторно-матричная система уравнений

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_s & M_{rs} \\ M_{sr} & Z_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где $Z_s = Z_{\sigma s} + M_s$ - параметрическая матрица обмотки статора;

$$Z_{\sigma s} = \begin{pmatrix} R_A + l_{\sigma A} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & R_B + l_{\sigma B} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & R_C + l_{\sigma C} \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

- матрица параметров рассеяния обмотки статора;

$$M_s = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_{AA} & M_{BA} & M_{CA} \\ M_{AB} & M_{BB} & M_{CB} \\ M_{AC} & M_{BC} & M_{CC} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

- главная матрица собственных индуктивностей обмотки статора;

составляющие матрицы $Z_r = Z_{\sigma r} + M_r$ получаются из (1.2), (1.3) заменой больших индексов малыми;

$$M_{rs} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_{aA} & M_{bA} & M_{cA} \\ M_{aB} & M_{bB} & M_{cB} \\ M_{aC} & M_{bC} & M_{cC} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

- матрица взаимных индуктивностей обмоток ротора и статора;

$$M_{sr} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_{Aa} & M_{Ba} & M_{Ca} \\ M_{Ab} & M_{Bb} & M_{Cb} \\ M_{Ac} & M_{Bc} & M_{Cc} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

- матрица взаимных индуктивностей обмоток статора и ротора;

$$\bar{u}_S = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{pmatrix}, \quad \bar{i}_S = \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_r = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix}, \quad \bar{i}_r = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}$$

- векторы фазных напряжений и токов статора и ротора.

В (1.2) – (1.5) использованы общепринятые обозначения активных сопротивлений и индуктивностей. Индексы S, r относятся к статорным и роторным величинам.

Здесь необходимо сделать три замечания:

1). Векторы системы (1.1) записаны в трёхмерном векторном пространстве. Базисами пространства являются тройки единичных и ортогональных векторов $\{\bar{n}_A, \bar{n}_B, \bar{n}_C\}$ и $\{\bar{n}_a, \bar{n}_b, \bar{n}_c\}$. Эти базисы формально независимы (имеют одинаковую форму записи) и альтернативны в том смысле, что можно пользоваться обоими (как это сделано в (1.1)) или перейти к любому из них. Можно также перейти в (1.1) к каким-то другим базисам того же пространства. Смена базиса осуществляется путем линейного преобразования координат базиса и векторов системы (1.1). Множественность базисов пространства следует понимать так, что только один из них считается фактически независимым, а остальные выражаются через него, то есть являются зависимыми. В качестве такого независимого базиса обычно выбирают тройку единичных векторов, ориентированных по осям фаз статора

$$\bar{n}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тройку единичных векторов, ориентированных по осям фаз ротора

$$\bar{n}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или какую – то другую ортонормированную тройку векторов.

Заметим, что размерность пространства (число векторов базиса) совпадает с числом фаз обмоток статора или ротора $m=3$. Запись уравнений модели в трехмерном пространстве не снижает степени общности полученных выводов, распространяемых на пространства любой размерности, но позволяет наглядно иллюстрировать текст пособия;

2). Параметры ЭМ, входящие в параметрическую матрицу $\begin{pmatrix} Z_S & M_{rS} \\ M_{Sr} & Z_r \end{pmatrix}$,

являются фазными параметрами, то есть величинами, справедливыми для выбранных систем фазных координат. При преобразованиях координат и параметры, и параметрические матрицы заменяются эквивалентными (подобными) в той части (1.1), которая подверглась преобразованию;

3). Матрицы M_{rS} и M_{Sr} по (1.4), (1.5) содержат связи между базисами статорных и роторных векторов. Отметим, что эти связи реализованы физически в виде пространственных распределений проводников фаз и их

полей. Через эти распределения физически реализуются преобразования координат $abc \Rightarrow ABC$ (математически его реализует оператор, матрицей которого является матрица M_{rS}) и $ABC \Rightarrow abc$ (оператор с матрицей M_{Sr}). Так как системы координат связаны преобразованием поворота $abc \Leftrightarrow ABC$, то элементы матриц M_{rS} и M_{Sr} являются функциями угла поворота ротора θ .

Модель (1.1) необходимо дополнить соотношениями, определяющими энергетические потоки на входах ЭМ:

мощность электрического входа ЭМ

$$P_{эл} = \left(\begin{pmatrix} \bar{i}_S \\ \bar{i}_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z_S & M_{rS} \\ M_{Sr} & Z_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i}_S \\ \bar{i}_r \end{pmatrix} \right), \quad (1.6)$$

мощность механического входа ЭМ

$$P_{мех} = \left(\begin{pmatrix} \bar{i}_S \\ \bar{i}_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} (dt \cdot M_{rS}) \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (dt \cdot M_{Sr}) \cdot \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i}_S \\ \bar{i}_r \end{pmatrix} \right). \quad (1.7)$$

Отметим, что в модели (1.1) объединенный вектор $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_S \\ \bar{u}_r \end{pmatrix}$ представляет воздействие на систему по электрическому входу, объединенный вектор $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{i}_S \\ \bar{i}_r \end{pmatrix}$ представляет отклик системы. Собственно электрической машине в (1.1) соответствует объединенная параметрическая матрица

$$Z = \begin{pmatrix} Z_S & M_{rS} \\ M_{Sr} & Z_r \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

В математической модели (1.1) - (1.7) фигурируют векторы тока \bar{i} , напряжения \bar{u} , связанные между собой линейным преобразованием с матрицей Z . Эти векторы определены в трехмерном (в общем случае - в n -мерном) векторном пространстве. Дадим его строгое определение, а также определения некоторых других понятий, связанных с понятиями «вектор», «векторное пространство».

1.1.2 Линейные пространства. Линейная зависимость

Линейным пространством над числовым полем K (действительных или комплексных чисел) называется множество элементов $\mathcal{L} = \{x, y, z, \dots\}$, для любых элементов которого определены операции сложения элементов $x \oplus y$ и умножения их на число $\lambda \in K$ (принадлежащее полю K) $\lambda \otimes x$, дающие элементы, принадлежащие все тому же множеству $L = \{x, y, z, \dots\}$ и удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. $x \oplus y = y \oplus x$;
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

3. Существует (\exists) нулевой элемент $\Theta \in \mathcal{L}$, такой, что для любых (\forall) $x \in \mathcal{L}$ выполняется равенство $x \oplus \Theta = x$;
4. Для $\forall x \in \mathcal{L}$ \exists единственный элемент $(-x) \in \mathcal{L}$, называемый противоположным элементом для элемента x , такой, что $x \oplus (-x) = \Theta$;
5. $1 \otimes x = x$, для $\forall x \in \mathcal{L}$;
6. $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda \otimes \mu) \otimes x$, для $\forall x \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in K$;
7. $\lambda \otimes (x + y) = \lambda \otimes x + \lambda \otimes y$, для $\forall x, y \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in K$;
8. $(\lambda \oplus \mu) \otimes x = \lambda \otimes x + \mu \otimes x$, $\forall x \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in K$.

В дальнейшем под операциями \oplus, \otimes будем понимать обычные операции сложения и умножения, обозначаемые знаками "+", "×" (или знаком "·").

Элементы линейного пространства \mathcal{L} называются векторами и обозначаются символами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$, а само пространство \mathcal{L} называется векторным.

Линейной комбинацией векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n$, принадлежащих пространству \mathcal{L} , назовем выражение

$$\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \alpha_3 \cdot \bar{e}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n \in \mathcal{L}, \quad \alpha_i \in K, i = 1, \dots, n.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ называют коэффициентами линейной комбинации.

Среди всевозможных систем векторов из пространства \mathcal{L} можно выделить два существенно отличающихся друг от друга типа этих систем – линейно независимые и линейно зависимые системы.

Система векторов

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n) \in \mathcal{L}$$

называется линейно независимой, если линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \alpha_3 \cdot \bar{e}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n$$

равна нулю тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ одновременно равны нулю. Если же существуют коэффициенты линейной комбинации, одновременно не равные нулю, и такие, что

$$\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \alpha_3 \cdot \bar{e}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n = 0,$$

то система векторов называется линейно зависимой.

Применительно к теории ЭМ, в понятиях о линейной зависимости или независимости следует выделить два аспекта.

Линейная зависимость параметров фаз трактуется как линейная зависимость строк (столбцов) параметрических матриц. В целом строки матрицы Z линейно независимы, хотя бы потому, что линейно независимы параметры рассеяния. Другими словами, параметрами данной фазы ЭМ могут быть любые наборы физически реализуемых параметров, независимо от параметров других фаз. Параметры матриц собственных и взаимных индуктивностей могут быть линейно зависимыми и линейно независимыми. Возможности линейной зависимости заложены замкнутым магнитным полем. Если обмотку можно расположить симметрично относительно поля, то сумма взаимных индуктивностей будет равна нулю, что и приведет к линейной зависимости параметров. В противном случае они будут линейно независимы.

Линейная независимость параметров матрицы Z обеспечивает существование, по крайней мере, одного базиса векторного пространства с размерностью, равной числу фаз ЭМ.

Линейная зависимость фаз ЭМ трактуется как линейная зависимость векторов фазных величин (токов, напряжений, ЭДС) в реальных или эквивалентных фазах ЭМ. Фазы многофазных ЭМ являются линейно зависимыми. Их зависимость связана, как с явлением междуфазной взаимоиндукции, так и с зависимостью, накладываемой схемой соединения фаз. Линейно зависимыми являются токи обмотки, если она соединена в схему «звезда», а её фазные напряжения линейно независимы. Фазные токи схемы «треугольник» линейно независимы, а её фазные напряжения - линейно зависимы. В любой схеме линейные напряжения линейно зависимы. Однако в отдельных параметрических матрицах ЭМ некоторое количество фаз $r \leq m$ могут оказаться линейно независимыми, тогда в их состав можно включить любые r фаз из m имеющихся. Это даёт определённую свободу в формировании электромагнитных и энергетических процессов в ЭМ с данными параметрическими матрицами.

1.1.3 Размерность и базис пространства. Линейные подпространства

В том случае, когда в линейном пространстве \mathcal{L} существует линейно независимая система $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ из n векторов, тогда пространство \mathcal{L} называют n -мерным векторным пространством. При этом любую упорядоченную систему $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ из n независимых векторов пространства \mathcal{L} называют базисом этого пространства. Наибольшее число линейно независимых векторов равно размерности этого пространства. Ещё раз подчеркнём, что линейная независимость векторов базиса пространства не означает, что линейно независимы векторно-матричные уравнения, записанные в данном базисе этого пространства.

Полезно помнить две теоремы о базисе в пространстве \mathcal{L} :

Теорема 1. Любой вектор $\forall \bar{x} \in \mathcal{L}$ может быть единственным образом разложен по базису $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ этого пространства в виде линейной комбинации

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3 + \dots + x_n \cdot \bar{e}_n$$

Числа $x_1, \dots, x_n \in K$ называют координатами вектора \bar{x} в базисе (в системе координат) \mathcal{E} ,

Теорема 2. Если в пространстве \mathcal{L} существует n линейно независимых векторов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ таких, что $\forall \bar{x} \in \mathcal{L}$ является их линейной комбинацией, то пространство \mathcal{L} является n -мерным векторным пространством, а система

$$\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$$

некоторым базисом этого пространства.

Если число векторов базиса конечно, то пространство \mathcal{L} называют конечномерным, в противном случае – бесконечномерным. В данном учебном пособии рассматриваются конечномерные линейные векторные пространства, характерные для ЭМ с сосредоточенными параметрами.

Конструктивные исполнения ЭМ предполагают различные размерности векторного пространства от $n=1$ (обмотка статора однофазного электродвигателя) до $n = z_2 \gg 1$ (короткозамкнутая клетка ротора асинхронного электродвигателя). В целом для ЭМ векторное пространство имеет размерность, равную числу фаз той обмотки, у которой оно больше. Векторное пространство обмотки с меньшим числом фаз следует считать подпространством (частью) векторного пространства ЭМ.

Линейным подпространством (или просто подпространством) \mathcal{M} в пространстве \mathcal{L} назовем непустую совокупность из элементов этого пространства, для которых выполняются следующие два условия:

1. для $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}$, сумма $\bar{a} + \bar{b} \in \mathcal{M}$,
2. для $\forall \bar{a} \in \mathcal{M}$ и произвольного числа $\alpha \in K$, произведение $\alpha \cdot \bar{a} \in \mathcal{M}$.

Например, если \mathcal{L} трехмерное линейное пространство, то его одномерное подпространство - это совокупность векторов на прямой, ориентированной по какому-либо базисному вектору. Двумерное подпространство - это совокупность векторов, лежащих в плоскости двух любых базисных векторов. В связи с отмеченной выше линейной зависимостью фазных токов схемы "звезда" i_A, i_B, i_C , все векторы её тока

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = i_A \bar{n}_A + i_B \bar{n}_B + i_C \bar{n}_C$$

принадлежат двумерному подпространству – плоскости, заданной в векторном пространстве уравнением

$$i_A + i_B + i_C = 0.$$

Фазные токи схемы принадлежат трём одномерным векторным подпространствам

$$i_A \bar{n}_A, \quad i_B \bar{n}_B, \quad i_C \bar{n}_C.$$

Для симметричной z - фазной короткозамкнутой клетки ротора пространство токов z -мерно, но, в связи с линейной зависимостью, все её токи

$$\bar{i}_r = \begin{pmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_z \end{pmatrix} = i_1 \bar{n}_1 + i_2 \bar{n}_2 + \dots + i_z \bar{n}_z$$

принадлежат двумерному подпространству – плоскости, заданной тем же уравнением

$$i_A + i_B + i_C = 0.$$

Наличие общего векторного подпространства позволяет трёхфазной обмотке и z - фазной клетке взаимно трансформировать токи. Если предположить у

клетки существование каких-то токов, лежащих вне плоскости (это может быть при нарушении симметрии клетки), то они не смогут трансформироваться в обмотку статора, соединённую в "звезду", а пополнят спектр дифференциального рассеяния клетки.

1.1.4 Скалярное произведение. Мощность векторного пространства

Для характеристики взаимного положения элементов пространства вводят понятие метрики пространства. Рассмотрим векторное пространство U над полем комплексных чисел

$$U = \{z \mid z = a + jb, a, b \in R, j^2 = -1\}.$$

Если любым элементам $X, Y \in U$, заданным в определенном порядке, поставлено в соответствие некоторое комплексное число, обозначаемое (X, Y) , такое что верны равенства:

$$(X, Y) = \overline{(Y, X)}, Y = \alpha + j\beta, \tilde{Y} = \alpha - j\beta, \quad (1.9)$$

$$(\lambda \cdot X, Y) = \lambda \cdot (X, Y), (X + Y, Z) = (X, Z) + (Y, Z) \quad (1.10)$$

$$(X, X) \geq 0, \text{ причем } (X, X) = 0, \text{ если } X = 0, \quad (1.11)$$

то его называют скалярным произведением векторов X и Y в пространстве U . В этом пространстве помимо скалярного произведения вводят число $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$, называемое нормой (модулем) вектора в этом пространстве. Если $\|X\| = 1$, вектор X называется ортом (нормированным или единичным вектором), причем для нормирования любого вектора его достаточно умножить на число $\lambda = \frac{1}{\|X\|}$. Для метрики пространства U введем число $\rho(X, Y) = \|X - Y\|$.

Пространство U с введенной в нем метрикой называют комплексным унитарным (эрмитовым) пространством. В том случае, когда скалярное произведение $(X, Y) = 0$, говорят, что векторы X, Y ортогональны. Скалярным произведением векторов напряжения и тока в эрмитовом пространстве является комплексная (полная) мощность.

Следует отметить, что если векторное пространство рассматривается над полем действительных чисел, то метрика, удовлетворяющая постулатам (1.9) - (1.11) и условию $(X, X) \geq 0$, называется евклидовой, а пространство - евклидовым. Евклидовым пространством является пространство мгновенных напряжений, ЭДС и токов ЭМ. Скалярным произведением векторов напряжения и тока в евклидовом пространстве является мгновенная мощность.

Если в пространстве U выбран базис $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ то скалярное произведение может быть записано в координатной форме записи вида:

$$(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{e}_i, \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j \cdot \bar{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \cdot x_i \cdot \tilde{y}_j \quad (1.12)$$

где $h_{ij} = (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$.

Выражение (1.12) называют билинейной эрмитовой формой. В случае ортонормированного базиса из векторов

$$\bar{e}_i, \|\bar{e}_i\| = 1, i = 1, \dots, n, (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0, i \neq j$$

эрмитова форма принимает вид:

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i. \quad (1.13)$$

Следует подчеркнуть, что векторному пространству ЭМ соответствует поле мощности векторного аргумента $\cdot \bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{pmatrix}$. Это означает, что любой точке

пространства ставятся в соответствие не только векторы тока и напряжения по (1.1), но и их скалярное произведение – мгновенная или комплексная мощность по (1.6).

1.1.5 Линейные преобразования векторов. Линейные операторы

Элементы векторных пространств могут преобразовываться в элементы этих же пространств (или других векторных пространств). Для описания соответствия между элементами при этих преобразованиях введем понятие линейного оператора.

Линейным оператором \mathbf{A} , действующим из пространства \mathcal{L} в \mathcal{L} называется преобразование \mathbf{A} , ставящее, по некоторому закону, в соответствие каждому вектору $\bar{x} \in \mathcal{L}$ вектор $\mathbf{A}\bar{x} \in \mathcal{L}$ так, что выполняются равенства:

$$\mathbf{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{A}\bar{y}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{A}(\lambda \cdot \bar{x}) = \lambda \cdot \mathbf{A}\bar{x}. \quad (1.15)$$

Так как любой вектор $\bar{x} \in \mathcal{L}$ может быть разложен по базису \mathcal{E} в этом пространстве в виде линейной комбинации

$$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3 + \dots + x_n \cdot \bar{e}_n,$$

то и вектор $\mathbf{A}\bar{x} \in \mathcal{L}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{A}\bar{x} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3 + \dots + a_n \cdot \bar{e}_n. \quad (1.16)$$

Заметим по (1.16), что оператор \mathbf{A} преобразует вектор \bar{x} в вектор $\mathbf{A}\bar{x}$, но смены базиса при этом не происходит.

Если применить выражение (1.16) к каждому вектору базиса \mathcal{E} пространства \mathcal{L} , то получим очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\bar{e}_1 &= a_{11} \cdot \bar{e}_1 + a_{12} \cdot \bar{e}_2 + a_{13} \cdot \bar{e}_3 + \dots + a_{1n} \cdot \bar{e}_n, \\ \mathbf{A}\bar{e}_2 &= a_{21} \cdot \bar{e}_1 + a_{22} \cdot \bar{e}_2 + a_{23} \cdot \bar{e}_3 + \dots + a_{2n} \cdot \bar{e}_n, \\ &\dots \\ \mathbf{A}\bar{e}_n &= a_{n1} \cdot \bar{e}_1 + a_{n2} \cdot \bar{e}_2 + a_{n3} \cdot \bar{e}_3 + \dots + a_{nn} \cdot \bar{e}_n. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В этих равенствах коэффициенты a_{ij} являются координатами векторов $\mathbf{A}\bar{e}_i$ в базисе \mathcal{E} из векторов $\bar{e}_j, i, j = 1, \dots, n$. Таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

называется матрицей линейного преобразования \mathbf{A} . Теперь можно записать правило соответствия

$$\mathbf{A}\bar{x} \xleftrightarrow{\text{def}} A \cdot \bar{x},$$

которое можно прочесть следующим образом: линейному преобразованию вектора \bar{x} соответствует матрица A по (1.18). При этом координаты вектора \bar{x} изменяются из значений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

в значения

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

В заданном базисе каждому линейному оператору \mathbf{A} соответствует определенная и единственная матрица A , и наоборот каждой матрице отвечает единственный оператор.

Таким образом, умножению вектора на матрицу, в том числе – вектора тока на параметрическую матрицу ЭМ, соответствует операция преобразования координат. Судя по выражениям (1.1) и (1.7) преобразования координат является неотъемлемым (имманентным) свойством электрических машин. Поскольку параметрическая матрица адекватно отображает физическую структуру, постольку линейные преобразования токов в электрической машине совершаются физически.

Смысловое содержание преобразования координат определяется свойствами матрицы A . Если для неё имеется обратная матрица, столбцы (строки) которой пропорциональны ортам некоторого нового базиса, то преобразование совершается в новый базис. Примерами являются матрицы M_{rS} и M_{Sr} в (1.1), реализующие преобразования $abc \Rightarrow ABC$ и $ABC \Rightarrow abc$. В противном случае преобразование совершается в тот же базис. Такие преобразования ($ABC \Rightarrow ABC$ и $abc \Rightarrow abc$) реализуются матрицами Z_S и Z_r в (1.1).

В топологическом отношении различают два типа линейных преобразований: общего типа и масштабное.

Преобразование общего типа имеет место тогда, когда вектор \bar{x} не является собственным вектором (см. далее) матрицы A . Преобразованию соответствует запись

$$A\bar{x} = \lambda_d \bar{x} + \lambda_q \bar{y}$$

и мощность

$$p = (\bar{x}, A\bar{x}) = \lambda_d |\bar{x}|^2,$$

где λ_d, λ_q некоторые числа, а $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. В данном случае, между векторами \bar{x} и $A\bar{x}$ имеется фазовый сдвиг

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\lambda_q |\bar{y}|}{\lambda_d |\bar{x}|} \right),$$

свидетельствующий о том, что матрица по отношению к вектору проявляет себя как комплексное число. Подобные преобразования осуществляются матрицами ЭМ (см. (1.3) – (1.5)) с векторами токов в общем случае.

Масштабное преобразование имеет место в том случае, если вектор \bar{x} является собственным вектором матрицы A , отвечающим собственному числу λ . Преобразованию соответствует запись

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$$

и мощность

$$p = (\bar{x}, A\bar{x}) = \lambda |\bar{x}|^2.$$

В данном случае, угол между векторами \bar{x} и $A\bar{x}$

$$\varphi = 0,$$

а матрица по отношению к вектору проявляет себя как действительное число λ . В частности, такие преобразования характерны для матриц рассеяния симметричных ЭМ. Для них

$$Z_\sigma = z_\sigma E, \quad Z_\sigma \bar{i} = z_\sigma E \bar{i} = z_\sigma \bar{i},$$

а собственным числом λ является сопротивление рассеяния любой из фаз ЭМ - z_σ .

Каждому линейному преобразованию соответствует мощность. Мощностью линейного преобразования p называется мощность вектора \bar{x} по отношению к матрице (в матрице) A , вычисляемая как скалярное произведение

$$p = (\bar{x}, A\bar{x}).$$

Сформулируем важнейшее энергетическое свойство матриц, связанное с преобразованием координат.

Теорема. Мощность является инвариантом при преобразовании векторов пространства в новый базис.

Доказательство.

Пусть вектор \bar{x} задан в базисе $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ и в матрице A ему соответствует мощность $p = (\bar{x}, A\bar{x})$. Переведем вектор в новый базис, ортонормированными векторами которого являются столбцы матрицы $V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n)$. Матрица V ортогональна, следовательно справедливы записи

$$V^{-1} = V^t, \quad (V^{-1})^t = (V^t)^t = V.$$

Вектор \bar{x} в новом базисе записывается как

$$\tilde{x} = V^{-1}\bar{x}.$$

Тогда мощность преобразования по величине и форме записи

$$p = (\bar{x}, A\bar{x}) = (V\tilde{x}, AV\tilde{x}) = \tilde{x}^t V^t AV \tilde{x} = (\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{x})$$

одинакова (обладает свойством инвариантности) в новом и старом базисе.

Обратим внимание на то, что изменение базиса заменяет матрицу преобразования A (параметрическую матрицу ЭМ) на матрицу $\tilde{A} = V^t AV$. В связи с этим сформулируем два следствия теоремы.

1. При преобразованиях базисов параметры ЭМ заменяются эквивалентными, а мощность сохраняется неизменной.
2. Параметры ЭМ имеют смысл сопротивлений эквивалентных фаз, размещенных по осям базиса. При изменении базиса система эквивалентных фаз с данными параметрами заменяется другой системой с другими параметрами.

1.2 Матрицы. Типы и свойства матриц

Параметрические матрицы электрической машины, как правило, являются квадратными. Рассмотрим множество \mathcal{L}_N квадратных матриц размера $n \times n$ элементов

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Если для любых матриц $A, B \in \mathcal{L}_N$ определить сумму матриц как новую матрицу

$$C = A + B,$$

элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ и произведение матрицы на число λ как матрицу

$$D = (d_{ij}), \quad d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij},$$

то полученное множество \mathcal{L}_N с введенными операциями является линейным пространством.

Для любой матрицы $A \in \mathcal{L}_N$, вводится операция транспонирования

$$A^t = (a_{ji}).$$

Операция умножения матриц определяется формулой

$$C = A \cdot B, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Стоит отметить, что в общем случае операция умножения матриц не обладает свойством перестановочности ($A \cdot B \neq B \cdot A$).

Среди матриц из пространства \mathcal{L}_N выделим матрицы специального типа, часто встречающиеся при моделировании ЭМ.

Во-первых, это единичная матрица

$$E = (\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где δ_{ij} это символы Кронекера. Все элементы этой матрицы, кроме элементов главной диагонали, равны 0. Элементы главной диагонали равны 1. Основное свойство единичной матрицы состоит в том, что для любой матрицы $A \in \mathcal{L}_N$ имеет место равенство

$$E \cdot A = A \cdot E = A. \quad (1.19)$$

Если матрица равна своей транспонированной матрице

$$A = A^t,$$

то матрицу A называют симметрической.

В том случае, когда выполняется равенство

$$A = -A^t,$$

говорят, что матрица A кососимметрическая. Эти матрицы соответственно имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы собственных индуктивностей ЭМ являются симметрическими в силу принципа взаимности Максвелла. Кососимметрические матрицы характеризуют анизотропные параметрические свойства векторного пространства ЭМ.

Для любых квадратных матриц $A \in \mathcal{L}_N$ можно определить число

$$\det A = |A|,$$

называемое определителем матрицы. Понятие определителя широко применяется при классификации матриц, решении систем линейных уравнений, исследовании линейной зависимости векторов и других вопросов.

Для электромеханика особенно важно, равен ли нулю определитель параметрической матрицы. Равенство определителя нулю указывает на возможность особых (вырожденных) электромагнитных и энергетических состояний ЭМ, свидетельствует о склонности её к повышенному рассеянию энергии.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A называется невырожденной. Для любой невырожденной квадратной матрицы A существует матрица A^{-1} , называемая обратной к матрице A такая, что справедливы равенства

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (1.20)$$

Напомним читателю наиболее часто встречающиеся правила работы с обратными матрицами:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t; \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \quad (1.21)$$

Матрицу A называют ортогональной, если обратная ей матрица равна транспонированной матрице:

$$A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A \cdot A^t = A^t \cdot A = E. \quad (1.22)$$

Для любых ортогональных матриц справедливо утверждение о том, что модуль их определителя равен 1. Матрица A^{-1} является также ортогональной, как ортогонально произведение ортогональных матриц. Ортогональной является матрица классических (на плоскости) координатных преобразований $\alpha\beta, dq, uv$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Действительно, вычислив обратную матрицу, учитывая равенство

$$\det A = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

находим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A^t.$$

Если применить к элементам матрицы $A \in \mathcal{L}_N$ операцию комплексного сопряжения, заменить любой ее элемент a_{ij} на комплексно сопряженный \tilde{a}_{ij} , то матрицу $\tilde{A} \in \mathcal{L}_N$ называют комплексно сопряженной по отношению к матрице A .

Ниже приводятся правила работы с комплексно сопряженными матрицами:

$$(\alpha A + \beta B)^\sim = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{A} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{B}; \quad (A \cdot B)^\sim = \tilde{A} \cdot \tilde{B}; \quad (A^t)^\sim = (\tilde{A})^t; \quad (A^{-1})^\sim = (\tilde{A})^{-1}.$$

При этом матрицы A и \tilde{A}^t называют эрмитово сопряженными. Если же для этих матриц выполняется равенство

$$A = \tilde{A}^t,$$

то матрицу A называют эрмитовой.

Заметим, что матрицы вида

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & -1 \end{pmatrix},$$

выделяющие из вектора эллиптического тока ЭМ прямую и обратную последовательность, то есть матрицы, осуществляющие линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_\alpha \\ \dot{I}_\beta \end{pmatrix},$$

являются эрмитовыми матрицами.

В пространстве матриц \mathcal{L}_N выделим также унитарные матрицы. Матрица называется унитарной, если обратная к ней матрица совпадает с эрмитово сопряженной матрицей, то есть, верны равенства:

$$A^{-1} = \tilde{A}^t \Leftrightarrow A \cdot \tilde{A}^t = \tilde{A}^t \cdot A = E. \quad (1.23)$$

При действиях над унитарными матрицами полезно помнить, что матрица обратная унитарной является унитарной, также как унитарно произведение

унитарных матриц. Унитарной является матрица, осуществляющая преобразование симметричных составляющих "012"

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

где $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Заметим, что если все элементы матрицы $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ являются вещественными числами, то $A = \tilde{A}$. Для них понятия симметричности и эрмитовости, а также ортогональности и унитарности совпадают.

1.3 Собственные свойства матриц

1.3.1 Характеристический многочлен и спектр матрицы

Для любой матрицы

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

существует матрица

$$A - \lambda \cdot E,$$

где λ некоторый числовой параметр.

Эту матрицу называют характеристической для матрицы A . Если раскрыть определитель характеристической матрицы

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$$

по элементам строки (столбца), то полученное выражение окажется многочленом степени n относительно параметра λ

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot |A|.$$

Этот многочлен называется характеристическим, а его корни - собственными значениями (собственными числами) матрицы. Известно, что характеристический многочлен имеет ровно n действительных и комплексных корней (с учетом их возможной кратности). Собственные значения обладают рядом свойств, в числе которых равенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}.$$

Из этого выражения следует, что сумма всех собственных чисел равна сумме диагональных элементов матрицы, называемой следом матрицы.

Известно также, что если матрица A подобна матрице B , то есть справедливо равенство

$$A = X \cdot B \cdot X^{-1},$$

то равны характеристические многочлены этих матриц

$$|A - \lambda E| = |B - \lambda E|,$$

а значит, равны следы подобных матриц и их определители.

В частности, что особенно важно, подобными являются параметрические матрицы ЭМ «до» и «после» преобразования координат к новому базису.

Фазные параметры ЭМ, параметры ЭМ «по ортогональным осям», параметры ЭМ для различных последовательностей являются элементами подобных матриц.

1.3.2 Собственные числа и собственные векторы матрицы

Задачей на собственные числа и собственные векторы матрицы называют задачу о нахождении чисел λ и соответствующих им векторов \bar{x} , принадлежащих определённому векторному подпространству таких, что имеют место векторно-матричные равенства

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot \bar{x} = 0. \quad (1.24)$$

Задача (1.24) имеет решения при значениях параметра λ , являющихся корнями характеристического уравнения

$$\varphi(\lambda) = 0.$$

Эти корни, как уже отмечалось, называют собственными числами матрица A , а соответствующие им векторы – собственными векторами матрицы. Так как каждому линейному оператору \mathcal{A} соответствует матрица, то собственные числа этой матрицы одновременно являются и собственными числами линейного оператора \mathcal{A} .

Спектром оператора \mathcal{A} (спектром матрицы A) называется множество всех его собственных чисел. Если спектр оператора \mathcal{A} состоит из попарно различных собственных чисел, то собственные векторы, отвечающие этим числам, всегда линейно независимы, а значит, они образуют какой-либо базис векторного пространства матрицы A . Оператор \mathcal{A} назовем оператором простой структуры в n мерном векторном пространстве, если он имеет в этом пространстве n линейно независимых собственных векторов. Заметим, что операторы простой структуры существуют как в случае различных, так и в случае кратных корней спектра. Можно считать, что в n мерном векторном пространстве существует n независимых направлений (или главных осей матрицы), вдоль которых оператор простой структуры осуществляет «растяжение» с масштабными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, являющимися собственными числами оператора (матрицы). Произвольный вектор \bar{x} пространства может быть разложен на компоненты, идущие вдоль собственных направлений. Компоненты подвергаются соответствующим «растяжениям», после чего они в сумме дают вектор $\mathcal{A}\bar{x}$.

В базисе из собственных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n$ оператору \mathcal{A} соответствует диагональная матрица

$$E_d = (\lambda_i \cdot \delta_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

В произвольном базисе $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$ оператору \mathcal{A} соответствует матрица A , не являющаяся диагональной

$$A = T \cdot E_d \cdot T^{-1}. \quad (1.26)$$

В (1.26) $T = (t_{ij})$ матрица преобразования от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n$ к базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$. Для векторов базисов справедливо соотношение

$$\bar{g}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{e}_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

С учетом (1.26) матрицы оператора A , записанные в разных базисах подобны, а значит, равны и их определители

$$\det A = \det E_d = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (1.27)$$

При изучении параметрических матриц ЭМ полезно помнить следующие положения линейной алгебры.

1. Произвольный линейный оператор (матрицу) A можно всегда можно представить в виде суммы эрмитовых операторов.

$$A = \#_1 + j\#_2,$$

2. Оператор A ортогонален тогда и только тогда, когда перестановочны эрмитовы операторы

$$\#_1\#_2 = \#_2\#_1.$$

3. Перестановочные операторы (матрицы) A и B всегда имеют общий собственный вектор.
4. Каждый собственный вектор ортогонального оператора (ортогональной матрицы) является и собственным вектором эрмитова оператора (эрмитовой матрицы).
5. Все собственные числа эрмитова оператора вещественны.
6. Все собственные числа унитарного оператора по модулю равны единице.
7. Эрмитовы и унитарные операторы являются частными видами ортогональных операторов.

Собственные числа для ЭМ имеют смысл параметров (характеристических сопротивлений) векторных подпространств. Чем больше собственное число, тем большую удельную мощность имеет данное подпространство или данное направление векторного пространства (или данная эквивалентная фаза).

Если собственные числа имеют кратность (1, 2, 3...), то соответствующие векторные подпространства имеет размерность равную кратности (ось, плоскость, трехмерное подпространство, ...).

Значение задачи о собственных числах и собственных векторах для энергетической теории ЭМ состоит в том, что любая матрица ЭМ (см. (1.1) – (1.5)), осуществляя то или иное преобразование координат вектора тока, формирует соответствующий фрагмент поля мощности ЭМ.

1.4 Квадратичные формы и канонические преобразования координат

1.4.1 Квадратичные формы и их матрицы

Квадратичными формами являются мощности ЭМ, поэтому исследователь, изучающий энергетические аспекты электромеханического преобразования энергии, по существу изучает квадратичные формы параметрических матриц ЭМ.

Квадратичной формой действительных переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется однородный многочлен второй степени вида

$$p = \Phi(\bar{X}) = \Phi(x_1, \dots, x_n) = (\bar{X}, A\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (1.28)$$

Будем считать, что для коэффициентов квадратичной формы выполняются равенства $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$. В линейных цепях ЭМ это соотношение обеспечивается равенством взаимных индуктивностей и тождественностью общих элементов двух контуров с номерами i и j .

Симметрическую матрицу $A = (a_{ij})$, составленную из коэффициентов квадратичной формы, назовем матрицей квадратичной формы. Квадратичная форма имеет канонический вид, если матрица квадратичной формы имеет диагональный вид

$$A = (a_{ij} \cdot \delta_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Для определения числа линейно независимых строк (столбцов) матриц вводится понятие ранга матрицы. По определению, рангом матрицы A называется число, обозначаемое $Rg(A)$, которое равно наивысшему порядку отличного от нуля определителя, составленного из элементов матрицы, стоящих на пересечении ее строк и столбцов. Очевидно, что для квадратной матрицы A , имеющей n строк и n столбцов, выполняется неравенство $Rg(A) \leq n$. Ранг матрицы равен также числу ее линейно независимых строк (столбцов). Ранг матрицы квадратичной формы считается и рангом формы.

Ранг параметрической матрицы Z (см. (1.8)) равен числу фаз ЭМ. Ранг матриц рассеяния m -фазной ЭМ равен m , что делает все строки (столбцы) Z взаимно независимыми. Однако эта параметрическая независимость, не делает фазы ЭМ независимыми в электромагнитном и энергетическом отношении. Как уже отмечалось, зависимость накладывается взаимными индуктивными связями фаз и схемой их соединения (то есть электрическими связями фаз).

При наличии достаточных условий (см. пункт 1.4.3) линейная зависимость фаз физически реализуется междуфазным (поперечным) энергообменом.

Ранг матрицы не изменяется при эквивалентных преобразованиях матриц:

1. Перестановке местами двух любых строк;
2. Умножении строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3. Добавлении к одной строке линейной комбинации других строк;
4. При транспонировании матрицы;
5. Отбрасывании строки (столбца), состоящей из одних нулей;
6. При отбрасывании одной из двух пропорциональных строк (столбцов).

то квадратичная форма примет вид

$$\Phi(\bar{X}) = (\bar{X}, E_d \bar{X}),$$

где E_d матрица квадратичной формы в собственном базисе.

В произвольном базисе $G = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n)$ квадратичная форма записывается следующим образом:

$$\Phi(\bar{X}_1) = \bar{X}_1^t \cdot A \cdot \bar{X}_1, \quad \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

где $\bar{X}_1 = T^{-1} \bar{X}$ - вектор \bar{X} в базисе G .

Координаты векторов собственного и произвольного базисов связаны ортогональным преобразованием, производимым матрицей T , строками которой служат ортонормированные собственные векторы матрицы A .

$$\bar{X} = T \cdot \bar{X}_1, \quad \bar{X}_1^t = \bar{X}^t T. \quad (1.30)$$

В собственном базисе квадратичная форма будет иметь канонический вид:

$$p = \Phi(\bar{X}) = \Phi(\bar{X}_1) = \bar{X}^t (T A T^t) \bar{X} = \bar{X}^t E_d \bar{X} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \quad (1.31)$$

Как уже отмечалось, мощность инвариант относительно формы записи, а матрица

$$E_d = T A T^t = T A T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

является диагональной.

Таким образом, каждая квадратичная форма с симметрической матрицей A и вещественными коэффициентами (то есть форма мгновенной мощности) ортогональным преобразованием координат

$$E_d = T A T^{-1}$$

приводится к канонической форме записи.

Для квадратичной формы с эрмитово сопряженной матрицей (то есть для формы комплексной мощности) известно, что существует унитарное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду

$$\Phi(\bar{X}) = \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 + \dots + \lambda_n |x_n|^2, \quad (1.32)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - собственные числа матрицы квадратичной формы, x_i - комплексная координата вектора \bar{X} по i -той собственной оси.

Координатные преобразования к собственному базису параметрической матрицы называются каноническими преобразованиями, а координаты векторов в собственном базисе – каноническими координатами.

Выражения (1.31), (1.32) позволяют сделать ряд выводов о закономерностях полей мощности матриц ЭМ.

Мощность вектора тока определяется не квадратами его фазных координат, а квадратами его канонических координат, то есть не физическими

токами, а каноническими проекциями тока. Исключением является тот случай, когда физические (фазные) токи и канонические проекции совпадают. Такой случай имеет место в матрицах рассеяния ЭМ.

Очевидно, что физические токи несут с собой не только потребляемую мощность, но и обменную мощность. Ею обмениваются физические фазы или векторные подпространства (эквивалентные фазы). Следует вспомнить о линейной зависимости фаз ЭМ, как о топологической основе энергообмена. Тот факт, что сумма обменных мощностей для данной матрицы равна нулю, не означает, что с соответствующей ей компонентой тока не связана отличная от нуля мощность в других матрицах ЭМ. В них у того же тока будут другие канонические проекции. Здесь прежде всего следует иметь в виду матрицы рассеяния, в которых эта дополнительная мощность является дополнительным рассеянием.

Выражения (1.31), (1.32) свидетельствуют о существовании возможностей формирования векторов токов таким образом, что их канонические координаты станут максимальны в тех матрицах ЭМ, мощность которых отнесена к полезной (например, в матрицах M_{rs}, M_{sr} , реализующих механическую мощность (см. 1.7)). Они же должны быть минимальны в тех матрицах, мощность которых является мощностью рассеяния (например, в матрицах Z_{os}, Z_{or}). Возможности практической реализации этого принципа (принципа рационального питания), зависят от свойств параметрических матриц и анализируются в последующих разделах учебного пособия.

Мощность ЭМ (или её фрагмента, соответствующего данной матрице) структурируется пропорционально собственным числам матрицы и квадратам канонических координат тока.

Токи, расположенные в подпространствах, для которых $\lambda_i = 0$ имеют нулевую мощность в данной матрице. Это так называемые особые токи.

Поле мощности обладает чётной симметрией по отношению к главным осям параметрической матрицы.

В произвольном базисе отдельные компоненты мощности (см. 1.28)

$$p_{ij} = a_{ij}x_i x_j$$

могут быть положительными, отрицательными или нулевыми, в зависимости от знаков токов i -той и j -той фаз (x_i, x_j) и сопротивления взаимной индукции (a_{ij}). В целом поле мощности (1.28) представляет собой сложную картину фазных потреблений ($p_{ij}, i = j$) и междуфазных обменов ($p_{ij}, i \neq j$). В базисе собственных векторов матрицы (см. (1.31), (1.32)) энергообмен выведен из поля зрения. Действительно, любая компонента мощности $\lambda_i x_i^2$ в (1.31) неотрицательна, но, разумеется, энергообмен не исчез. Напротив, выражения (1.31), (1.32) указывают на его физическую природу – параметрическую неоднородность векторного пространства, выражаемую соотношениями $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$. На уровне фаз ЭМ этот факт носит название "асимметрия фаз".

В приведенных выше положениях и далее термины "потребление, энергопотребление" трактуются как "рассеяние" (для матриц рассеяния),

"накопление" (для матриц собственных индуктивностей), "преобразование" (для матриц взаимной индукции).

1.4.3 Продольное и поперечное подмножества векторного пространства. Поперечный энергообмен

Имеются два подмножества токов, обладающих соответственно высокой и низкой эффективностью в отношении их вклада в мощность p по (1.28) или (1.31). Ниже они обозначаются, как d и q подмножества или, как d и q токи. В частности, уже отмечалось, что мощность особых токов равна нулю. Эффективность токов, ориентированных по главным осям при условии $\lambda_i \neq 0$ тем выше, чем больше $|\lambda_i|$. Остальные токи обладают большей или меньшей эффективностью, в зависимости от их ориентации по отношению к главным осям.

Пусть E_d одна из параметрических матриц ЭМ в базисе главных осей, \bar{X} - вектор тока ЭМ в том же базисе,

$$p = \Phi(\bar{X}) = (\bar{X}, E_d \bar{X}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad (1.33)$$

мощность в матрице E_d . При фиксированной мощности $p = const$ выражение (1.33) представляет собой уравнение поверхности уровня поля мощности матрицы E_d в n -мерном пространстве. При вариациях мощности выражение (1.33) представляет поле мощности матрицы E_d как множество подобных (пропорциональных) поверхностей уровня. Зададим нормаль к поверхности для некоторого фиксированного тока

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и, соответственно, фиксированной мощности $p = const$. Уравнение нормали имеет вид

$$\frac{X_1 - x_1}{\lambda_1 x_1} = \frac{X_2 - x_2}{\lambda_2 x_2} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\lambda_n x_n} \quad (1.34)$$

где (x_1, \dots, x_n) координаты точки поверхности, в которой задана нормаль, совпадающие с координатами тока; (X_1, \dots, X_n) - текущие координаты пространства. Очевидно, что вектор

$$E_d \bar{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \dots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

является направляющим вектором нормали (1.34). Таким образом, приходим к выводу о том, что вектор $E_d \bar{X}$ нормален к поверхности $p = const$ в точке, заданной током \bar{X} .

Представим вектор \bar{X} суммой двух слагаемых

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \bar{X}_q,$$

таких что вектор \bar{X}_d коллинеарен нормали и вектору $E_d \bar{X}$

$$\lambda_{\exists} \bar{X}_d = E_d \bar{X},$$

а вектор $\bar{X}_q = \bar{X} - \bar{X}_d$ ортогонален им

$$(\bar{X}_q, E_d \bar{X}) = \lambda_{\exists} (\bar{X}_q, \bar{X}_d) = 0,$$

где λ_{\exists} некоторый коэффициент пропорциональности, имеющий смысл эквивалентного (в смысле мощности) собственного числа матрицы E_d . Ток \bar{X}_q обладает нулевой мощностью по отношению к вектору $E_d \bar{X}$, а мощность тока \bar{X}_d совпадает с мощностью тока \bar{X}

$$(\bar{X}, E_d \bar{X}) = (\bar{X}_d, E_d \bar{X}) = \lambda_{\exists} |\bar{X}_d|^2 = p.$$

Вместе с тем, мощность тока \bar{X}_q по отношению к матрице отлична от нуля

$$0 \leq p_q = (\bar{X}_q, E_d \bar{X}_q) < p.$$

Отлична от нуля и мощность тока \bar{X}_d

$$0 < p_d = (\bar{X}_d, E_d \bar{X}_d) \leq p.$$

Таким образом, в мощности полного тока \bar{X} выделяется четыре составляющих

$$p = (\bar{X}, E_d \bar{X}) = p_d + p_{dq} + p_{qd} + p_q = p_d + p_q,$$

где $p_{dq} = (\bar{X}_q, E_d \bar{X}_d)$ мощность обмена между нормальным и касательным направлениями (эквивалентными фазами) векторного пространства, вызываемого заданным током \bar{X} , а точнее – вызываемого компонентой \bar{X}_q заданного тока; $p_{qd} = -p_{dq} = (\bar{X}_d, E_d \bar{X}_q)$ мощность обратного процесса.

Несмотря на равенство

$$p_{dq} + p_{qd} = 0,$$

можно констатировать, что внутри структуры циркулирует отличная от нуля мощность, называемая мощностью поперечного энергообмена

$$|p_{dq}| = |p_{qd}| \neq 0, \text{ при } \bar{X}_q \neq 0,$$

связанная с компонентой тока \bar{X}_q . Сама эта компонента вызвана параметрической неоднородностью векторного пространства. Так как ЭМ - диссипативная структура, то циркуляция обменной мощности обеспечит дополнительное рассеяние мощности от тока \bar{X}_q в матрицах рассеяния машины и источника питания. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в энергетическом отношении поперечный процесс следует отнести к негативным явлениям.

Необходимые и достаточные условия возбуждения поперечного энергообмена формулируются следующим образом.

1. Электромагнитные процессы в фазах должны быть линейно зависимы. Для многофазных ЭМ и трансформаторов это условие обеспечивается междуфазными трансформациями ЭДС, токов и схемами соединения фаз.

2. Векторное пространство должно быть параметрически неоднородным. Для многофазных ЭМ и трансформаторов это условие обеспечивается различием сопротивлений прямой, обратной и нулевой последовательностей.
3. Вектор тока должен быть расположен, как минимум, в двух подпространствах с разными собственными числами.

Третье условие предоставляет некоторые возможности исключения или ослабления поперечного процесса. Вектор тока может быть размещен в одном векторном подпространстве соответствующим формированием питающих напряжений. Кроме того, ток может быть размещен в двух или нескольких подпространствах с одинаковыми собственными числами. Вопрос состоит лишь в том, имеет ли параметрическая матрица ЭМ такие подпространства. Матрица симметричной ЭМ имеет два таких подпространства (оси параметрической симметрии α, β) и симметричный источник создает ток именно в них, не возбуждая энергообмен. Как только симметрия нарушается (эксплуатационное старение и проч.) энергообмен появляется. Следует напомнить читателю о том, что термин "симметричная машина" имеет только технический смысл и означает "симметричная в рамках принятых допущений".

Отметим, что преобразование координат $E_d \bar{X}$ для неоднородной ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$) матрицы E_d является преобразованием общего типа, а для однородной ($\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_3$) - масштабным преобразованием. В последнем случае $\bar{X} = \bar{X}_d, \bar{X}_q = 0$ и поперечный энергообмен отсутствует.

Вектор \bar{X} в (1.33) был выбран произвольно, поэтому приведенные выше положения справедливы для любого тока векторного пространства. Совокупность векторов \bar{X}_d, \bar{X}_q для всех векторов (или токов) \bar{X} образует продольное и поперечное подмножества векторного пространства. Продольное подмножество включает в себя высокоэффективные в отношении создания или изменения мощности векторы. Поперечное подмножество включает в себя векторы с низкой или нулевой эффективностью.

Продольное подмножество ориентировано по градиенту скалярного поля мощности, а поперечное – по касательным к поверхностям уровня этого поля.

Сформулированный выше принцип рационального питания предполагает реализацию мощности ЭМ за счет токов продольного подмножества настолько, насколько это физически возможно и технически целесообразно.

1.4.4 Расчетный пример

Ниже приводятся результаты расчета несимметричной электрической цепи, иллюстрирующие положения параграфа 1.4. Схема цепи приведена на рисунке 1.1.

Электрическая цепь представляет собой трёхфазный резистивный приемник N, питаемый от источника ЭДС постоянного тока \bar{e} через контакты K. Мощность приёмника p в различных вариантах расчета принималась

фиксированной величиной. Соответственно мощность источника варьировалась

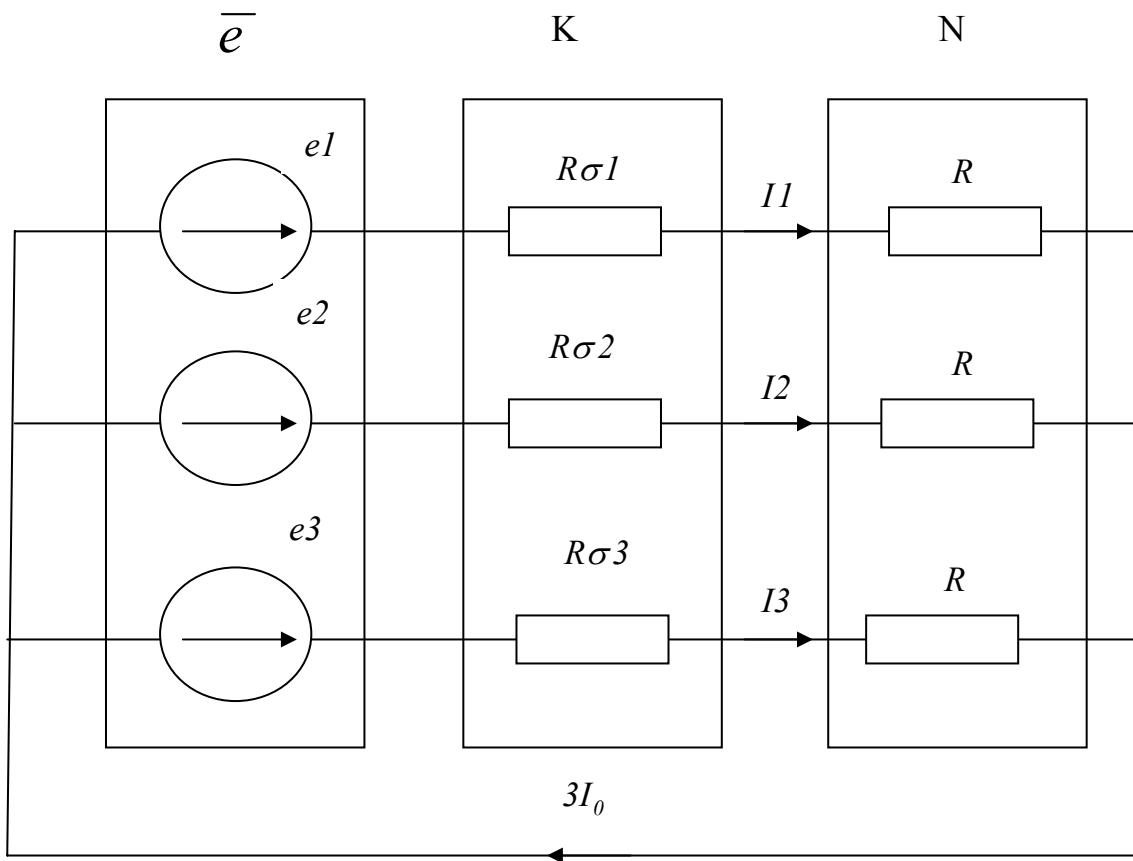


Рисунок 1.1 - Схема электрической цепи

в зависимости от мощности электрических потерь в контактах. Сопротивления контактов в фазах приняты различными, что можно отнести на счет их окисления или частичного разрушения. Предполагалось также, что фазные ЭДС источника не содержат составляющих нулевой последовательности

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{e}) = e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (1.35)$$

Технические данные цепи $R_{\sigma 1} = 1, R_{\sigma 2} = 2, R_{\sigma 3} = 3, R = 10$ Ом. Мощность приемника $p = 10$ Вт. Математическая модель цепи по рисунку 1.1 включает в себя уравнения (1.35), (1.36), (1.37)

$$\bar{e} = Z I \quad (1.36)$$

$$p_e = (I, \bar{e}) = (I, Z I) = p_{эл} + p, \quad (1.37)$$

где $p_e = |I| \cdot |\bar{e}| \cdot \cos \varphi$ мощность источника, $p_{эл}$ мощность электрических потерь,

$$Z = \begin{pmatrix} R_{\sigma 1} + R & 0 & 0 \\ 0 & R_{\sigma 2} + R & 0 \\ 0 & 0 & R_{\sigma 3} + R \end{pmatrix}$$

параметрическая матрица, ранга 3. Уравнение (1.35) делает фазы взаимно зависимыми.

Расчет цепи проводился для трёх вариантов питания.

Вариант 1 соответствует минимальным электрическим потерям.

Для него $\bar{e} = \begin{pmatrix} -9.09 \\ 6.23 \\ 2.86 \end{pmatrix}$ В.

Вариант 2 соответствует максимальным электрическим потерям.

Для него $\bar{e} = \begin{pmatrix} -4.14 \\ -6.00 \\ 10.14 \end{pmatrix}$ В.

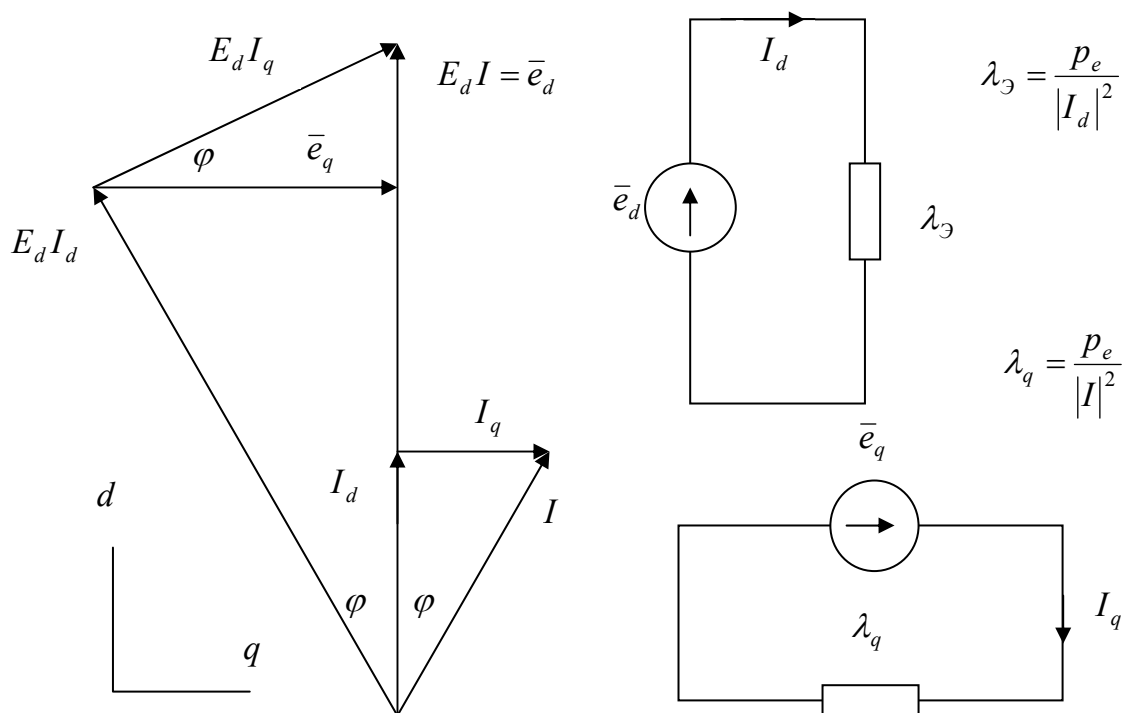


Рисунок 1.2 Векторная диаграмма и схемы замещения

Векторная диаграмма цепи и схемы замещения для составляющих тока приведены на рисунке 1.2.

Вариант 3 соответствует нулевой величине тока нулевой последовательности $I_0 = 0$.

Для него $\bar{e} = \begin{pmatrix} -4.49 \\ 9.80 \\ -5.31 \end{pmatrix}$ В.

Для всех вариантов справедливо равенство $|I| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} = 1$ А.

Результаты расчетов сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1 - Результаты расчета электрической цепи

Номер варианта	I	I_d	φ	$ I_q $	I_0	P_e	$P_{эл}$
1	$\begin{pmatrix} -0.83 \\ 0.52 \\ 0.22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.55 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	0.05	0.05	-0.03	11.37	1.37
2	$\begin{pmatrix} -0.38 \\ -0.50 \\ 0.78 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.33 \\ -0.48 \\ 0.81 \end{pmatrix}$	0.06	0.06	-0.03	12.47	2.47
3	$\begin{pmatrix} -0.41 \\ 0.82 \\ -0.41 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.81 \\ -0.44 \end{pmatrix}$	0.05	0.05	0	12	2

Данные, приведенные в таблице 1.1, свидетельствуют о следующем.

Для всех вариантов матрица Z осуществляет преобразование общего типа, с углом $\varphi \neq 0$.

Питание по варианту 2 увеличивает электрические потери в 1.8 раз по сравнению с вариантом 1 в связи с повышенным на 20% значением поперечного тока (0.06 А против 0.05 А).

Питание по варианту 3 находится на уровне варианта 1 по величинам поперечного тока и угла φ . Вместе с тем, ток I_d в варианте 3 реализован в тех векторных подпространствах, которые характеризует повышенное рассеяние. Это фазы с номерами 2 ($R_{\sigma_2} = 2$ Ом) и 3 ($R_{\sigma_3} = 3$ Ом). Фазные продольные токи в них составляют 0.81 А и - 0.44 А, против 0.55 А и 0.25 А в варианте 1. Мощность электрических потерь для варианта 3 в 1.46 раза выше, чем в варианте 1.

Таким образом, компонентный состав вектора тока, реализуемый источником питания, существенно влияет на мощности рассеяния электрических цепей. В полной мере это относится и к электрическим цепям электрических машин.

1.5 Контрольные вопросы

1. Приведите примеры базисных векторов электрической машины.
2. Какова размерность клеточной матрицы, связывающей вектор токов с вектором питания в математической модели (1.1)?

3. Какие физические параметры ЭМ представляются составными частями клеточной матрицы (матрицами $Z_S = Z_{\sigma S} + M_S$, $Z_r = Z_{\sigma r} + M_r$, M_{rS} , M_{Sr})?
4. При помощи какого понятия векторного анализа можно моделировать энергетические потоки ЭМ?
5. С какой целью в уравнениях (1.1) осуществляется преобразование перехода от базиса статора к базису ротора?
6. Каким математическим понятием описывается скалярное поле мощности ЭМ?
7. Какими по отношению друг к другу являются матрицы ЭМ реализующие преобразования $abc \Rightarrow ABC$ и $ABC \Rightarrow abc$? Чему равно произведение этих матриц?
8. Что является инвариантом преобразования электрической машиной векторов пространства токов при переходе к новому базису?
9. На что указывает равенство нулю определителя параметрической матрицы ЭМ?
10. К какому типу матриц относится матрица классических (на плоскости) координатных преобразований $\alpha\beta, dq, uv$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}?$$

11. Для матриц каких ЭМ понятия симметричности и эрмитовости, ортогональности и унитарности совпадают?
12. В каком случае оператор ЭМ будет являться оператором простой структуры?
13. В базисе из каких векторов оператору ЭМ будет соответствовать диагональная матрица?
14. Какой физический смысл имеют собственные числа параметрической матрицы ЭМ?
15. Как формируется скалярное поле мощности ЭМ при осуществлении ею преобразований векторного пространства токов?
16. Как связан ранг параметрической матрицы Z (см. (1.8)) ЭМ с числом ее фаз?
17. С помощью какого преобразования квадратичная форма мгновенной мощности приводится к канонической форме записи?
18. Чем определяется мощность вектора тока ЭМ?
19. Что является топологической основой анализа энергообмена в ЭМ?
20. Сформулируйте принцип рационального питания ЭМ.
21. Какие токи называются особыми?
22. Что представляет собою в n -мерном пространстве квадратичная форма мощности ЭМ при фиксированной мощности?
23. Какие составляющие могут быть выделены в скалярном поле мощности полного тока ЭМ?
24. Что называется мощностью поперечного энергообмена?
25. Что называется мощностью продольного энергообмена?
26. Сформулируйте условия возбуждения поперечного энергообмена?

27. Как ориентированы векторы продольного (поперечного) подмножества пространства токов?

2 ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1 Определение и основные свойства математических моделей

Согласно классическому определению "Математическая модель есть приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выполненное с помощью математической символики" (акад. А.Н. Тихонов).

Обратим внимание на три наиболее общих свойства математических моделей (ММ), фигурирующих в определении.

Приближённость ММ связана с принципиальной ограниченностью человеческих возможностей. Любой класс явлений, любой объект этого класса бесконечен в своих чертах, свойствах и проявлениях. Поэтому для его точного описания и исследования требуется интеллектуально-исследовательский аппарат бесконечной мощности. Свою исследовательскую деятельность в физическом и экономическом мире человечество осуществляет на поле приближённых знаний о мире и приближённых его описаний. Осознание этого факта ставит перед исследователем весьма важную практическую задачу. Какие черты объекта, из бесконечного их набора, должны быть описаны в ММ? В самом общем виде ответ на него звучит так: существенные для решаемого исследователем круга задач. Определение набора существенных черт (свойств) объекта – одна из наиболее ответственных задач математического моделирования.

Классовость ММ, называемая также изоморфизмом, связана с классовым строением внешнего мира. В данном случае под внешним миром понимается физический и экономический мир, в котором действуют законы сохранения (энергии, импульса, массы, капитала, продукта) и принцип неразрывности пространства. Такой мир может быть приближенно описан дифференциальными уравнениями или вариационными принципами. Внешний мир представляется бесконечно многообразным набором объектов, группирующихся в несколько общих классов. Некоторые представления о классах даёт курс уравнений математической физики. Одним из них является класс объектов, в которых энергия распространяется посредством диффузии. К классу явлений диффузионного типа относятся распространение электромагнитного и теплового полей в проводящие среды, диффузия примесей в жидкости и газы, диффузия труда и капитала на рынках. Все эти явления имеют одну и ту же математическую модель – уравнение диффузии [10]. Оно же с самых общих позиций описывает все индуктивные электрические машины, так как само явление индукции (влияние посредством поля) это явление диффузионного типа. Другой пример класса явлений – колебания и волны. Внутри этого класса колебания струн музыкальных инструментов и колебания балок строительных конструкций, волны мирового океана и энергетические потоки в линиях электропередачи, механические маятники и электрические контуры, радиоволны, вибрации электрических машин и их акустическое поле, колебания спроса и предложения на рынках.

Математической моделью этого класса явлений является уравнение колебаний (волновое уравнение) [10].

Все объекты, принадлежащие к классу, являются объектами – аналогами и имеют одну и ту же математическую модель. Именно она является классообразующим признаком. В ММ в виде дифференциального баланса или вариационного принципа заданы общие законы существования или движения объектов данного класса. При этом физическая или экономическая природа движения существенна только для понимания конкретики задачи, но не для описания траектории движения. Замена объекта аналогом, если аналог более доступен, удобен, нагляден или понятен, это основная идея аналогового моделирования, понимаемого в широком смысле как исследования мира посредством аналогий. Математическое моделирование, использующее замену объекта математическим аналогом, одна из форм реализации этой идеи.

Естественно задаться вопросом о том, к какому же классу объектов принадлежит ЭМ. Судя по выражению (1.1) это класс двухкомпонентных (статор и ротор) линейных операторов простой структуры, действующих в векторном пространстве токов $\vec{i} = \begin{pmatrix} \vec{i}_s \\ \vec{i}_r \end{pmatrix}$.

Приведем пример аналога ЭМ – механической машины. Это двухмассовая система, элементы которой объединены полем сил упругости пружины, приведенная на рис. 2.1. Система действует в векторном пространстве $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Массы m_1, m_2 аналоги магнитных полей статора и ротора,

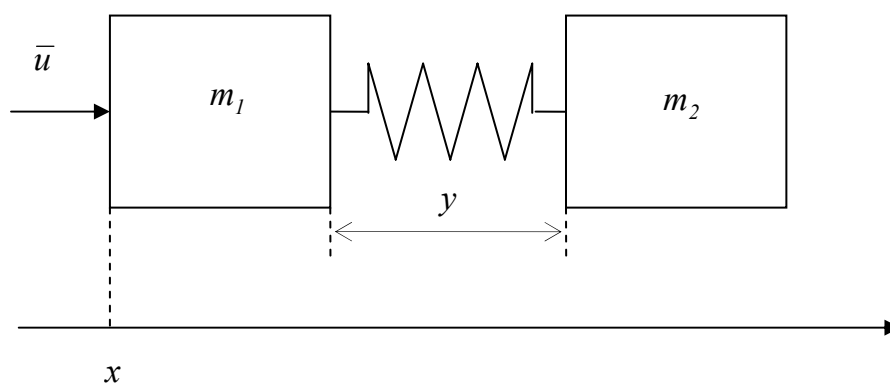


Рисунок 2.1 Механический аналог ЭМ

пружина – аналог поля взаимной индукции, внешняя сила \bar{u} - аналог источника питания ЭМ. Действие на конструкцию внешней силы приводит к изменению не только абсолютной координаты x на величину dx , но и относительной координаты y на величину dy . При этом изменяется сила упругости пружины – аналог механических сил, действующих на статор и ротор со стороны электромагнитного поля. Мощности $\bar{u} \frac{dx}{dt}$ и $\bar{u} \frac{dy}{dt}$ - аналоги мощностей электрического и механического входов ЭМ. Заметим, что принцип возможных перемещений не требует того, чтобы перемещения dx и dy совершались

физически. Они должны быть только возможными, то есть входить в число степеней свободы объекта. Если перемещения совершаются физически, то в объекте происходит переходный процесс. Виртуальные перемещения соответствуют стационарному состоянию объекта. Разумеется, можно подобрать объекты - аналоги и другой физической (или экономической) природы, более наглядные или удобные.

Математическая символика или придание модели формы математических выражений имеет, по крайней мере, два следствия.

- 1) Она означает, что дальнейшее исследование объекта может быть выполнено чисто математическими средствами, а физическое содержание задачи будет иметь значение только на этапе оценки решений.
- 2) Она включает в исследование весь инструментарий современной математики и вычислительной техники, что делает математическое моделирование мощным средством изучения объекта.

2.2 Ограниченность и иерархичность математических моделей

Основным требованием, предъявляемым к математической модели, является требование адекватности её объекту. Термин "адекватность" означает формальную тождественность в рамках допустимых погрешностей. Математическая модель, отображающая объект с допустимыми погрешностями - адекватна ему и может служить основой для его исследования.

Требование адекватности предполагает два свойства модели: ограниченность и иерархичность.

Под ограниченностью понимается ориентированность ММ на ограниченный круг задач, в рамках которого она сохраняет адекватность объекту. Отметим здесь, что погрешности моделирования должны быть не минимальными, а допустимыми. Это требование свидетельствует о том, что избыточная информация нежелательна, а иногда и вредна, так как затрудняет анализ объекта. В таких случаях, наряду с существенной информацией приходится накапливать, хранить, перерабатывать и анализировать несущественную информацию. Отметим также, что недостаточная информация свидетельствует о неадекватности модели и объекта.

Какие же черты объекта следует считать существенными? Очевидно те, которые содержат в себе достаточную информацию для решения задач, стоящих перед исследователем. Круг решаемых с помощью ММ задач и определяет погрешности, которые являются допустимыми.

Какие погрешности допустимы при расчетах ЭМ? Если речь идёт о выборе главных размеров, то допустимая погрешность ε определяется возможностями физической реализации конструкции ЭМ. Для типовой конструкции эти возможности заданы шкалами высот осей вращения и номинальных диаметров статора [15], имеющими дискретность около 20%. Очевидно, что соответствующий уровень погрешности $\varepsilon = 0.2$ следует считать допустимым для математической модели, ориентированной на эти задачи –

электромашинной постоянной. Если речь идёт о расчете рабочих характеристик, то требования к допустимой погрешности более жесткие. Здесь необходимо дать потребителю гарантии технических показателей с погрешностью на уровне $\varepsilon = 0.03 - 0.05$. Соответствующую точность должны обеспечивать модели для расчета активных и индуктивных параметров схемы замещения ЭМ. При расчетах пусковых характеристик параметры приходится дополнительно уточнять, иначе модель – основные уравнения ЭМ, потеряет адекватность объекту.

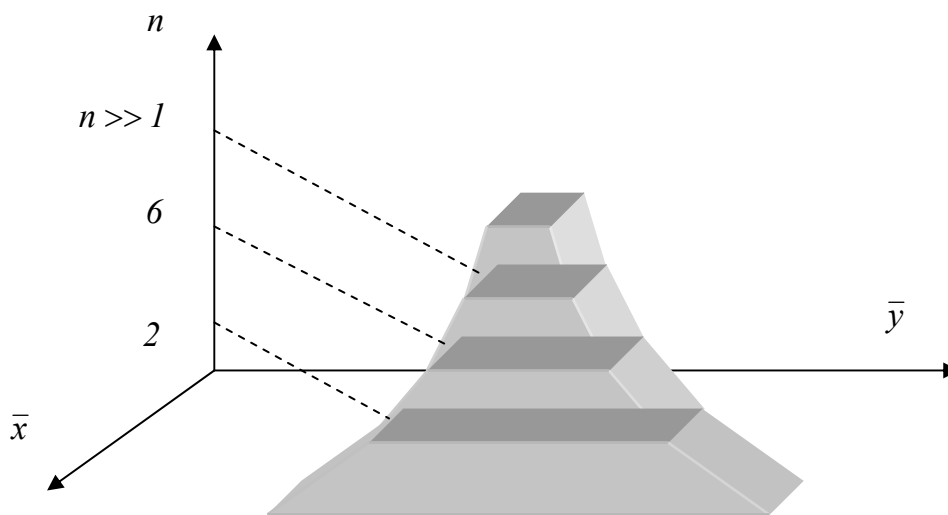


Рисунок 2.2 - Единое пространство задач

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Одна и та же модель адекватна объекту для одного круга задач и неадекватна ему – для другого. Поэтому понятия "адекватность", "допустимая погрешность" всегда соотносятся с кругом решаемых задач.

Другая сторона адекватности – иерархичность модели, то есть принадлежность её к определённому уровню иерархии. Она отражает иерархичность задач, связанных с созданием и эксплуатацией ЭМ в определённых рынком диапазонах экономических показателей. Можно считать, что имеется единое трехмерное пространство задач, координатами которого являются технические (эксплуатационные) показатели \bar{x} , экономические показатели \bar{y} и проектировочный уровень n , закладываемый в изделие те и другие показатели в соответствии с существующими технологическими возможностями. Представление о пространстве задач и его иерархичности даёт рисунок 2.2. Проектировочные уровни варьируются от эскизного проектирования и уточнения технического задания ($n = 1$), до тонкой оптимизации изделия ($n \gg 1$). Можно представить себе совершенствование объекта и на более высоких уровнях, например, под требования конкретного заказчика. Чем выше проектировочный уровень, тем выше степень детализации объекта и тем уже диапазоны вариации технических и экономических показателей (см. рис. 2.2). Таким образом, задача проектирования ЭМ

представляет собой иерархическую задачу, каждый этап которой наполняет изделие новыми деталями и свойствами.

Иерархичности проектировочной задачи отвечает иерархичность математических моделей, причем каждому уровню иерархии придаются свои требования по допустимым погрешностям.

На нижнем уровне располагается модель, отображающая самые общие представления об ЭМ. Это однородный объем, имеющий усредненные физические характеристики и способный поглощать и преобразовывать энергию каждым своим элементарным объемом. Электрическая энергия поступает в объем через внешнюю поверхность. Потoki тепловой и механической энергии покидают его через внешнюю поверхность. Физические характеристики объема и удельные плотности потоков энергии обычно определяются эмпирически. На верхних уровнях располагаются наиболее детализированные модели. Это модели фрагментов ЭМ, например фрагмента пазово-зубцовой зоны или фрагмента области, занятой лобовой частью обмотки. Где-то в центре иерархии располагаются модели ЭМ с гладкими сердечниками и поверхностными токовыми слоями вместо обмоток. Можно считать, что повышение уровня модели на единицу соответствует включению в модель одного конструктивного признака или одного физического свойства реальной машины путем добавления одного математического соотношения (уравнения, равенства, неравенства). Таким образом, детализация модели сопровождается ростом её математического порядка, то есть ростом размерности параметрической матрицы. Так порядок модели (1.1) с учетом ограничений, накладываемых на фазные величины схемами соединения фаз статора и ротора, не менее 6.

Казалось бы, рост детализации модели приводит к повышению её точности, однако практически это наблюдается только для моделей соседних уровней. С повышением детализации, в силу роста порядка модели, все более проблематичным становится получение решения вообще или в том виде, в котором оно необходимо. Модели ЭМ имеют порядок 5 – 6 даже при включении в них только неотъемлемых признаков: многофазных взаимно подвижных и взаимно индуцирующих обмоток. Повышение этого порядка до 6 – 7 уже создает проблемы, по крайней мере, с формой решения. Получение решения в форме ряда или в численной форме далеко не всегда приемлемо и, кроме того, приводит к погрешностям от замены ряда полиномом (см., например, [44]) или от особенностей численного метода. Более того, включая новое свойство в модель, исследователь далеко не точно описывает его, естественно тяготея к простым, гладким и дифференцируемым функциям. Это приводит к общей нестабильности решения и погрешностям. Их можно назвать технологическими (расчетными) погрешностями, в отличие от методических (модельных) погрешностей, связанных с большей или меньшей степенью идеальности модели данного уровня. Таким образом, попытки снизить методические погрешности приводят к росту технологических погрешностей и ограничивают возможности повышения точности моделей. Очевидно, что

необходим взвешенный компромисс между стремлением расширить круг решаемых задач и возможностями сохранения адекватности модели.

В целом можно отметить, что к выбору уровня модели необходимо подходить весьма осмотрительно, соотносясь с кругом решаемых с её помощью задач. При этом следует придерживаться принципа минимальной достаточности, как в отношении степени детализации модели, так и в отношении применяемых математических средств описания модели и получения решения.

2.3 Математическая модель как инструмент совершенствования электрических машин

Целью математического моделирования является повышение технических и экономических показателей качества ЭМ. Математическое моделирование функционально входит в этот процесс в качестве составной части [14]. В этом аспекте математическая модель является инструментом, позволяющим выработать предложения по совершенствованию объекта.

Процесс совершенствования ЭМ отображает рисунок 2.3. На этом рисунке стрелки 1, 2, 3 изображают процессы исследования математической модели (стрелка 1), предложения по совершенствованию объекта (стрелка 2), организационные, технические, административные и финансовые меры по совершенствованию объекта (стрелка 3), элемент рисунка с номером 4 изображает корзину, в которую отправляются несущественные черты и

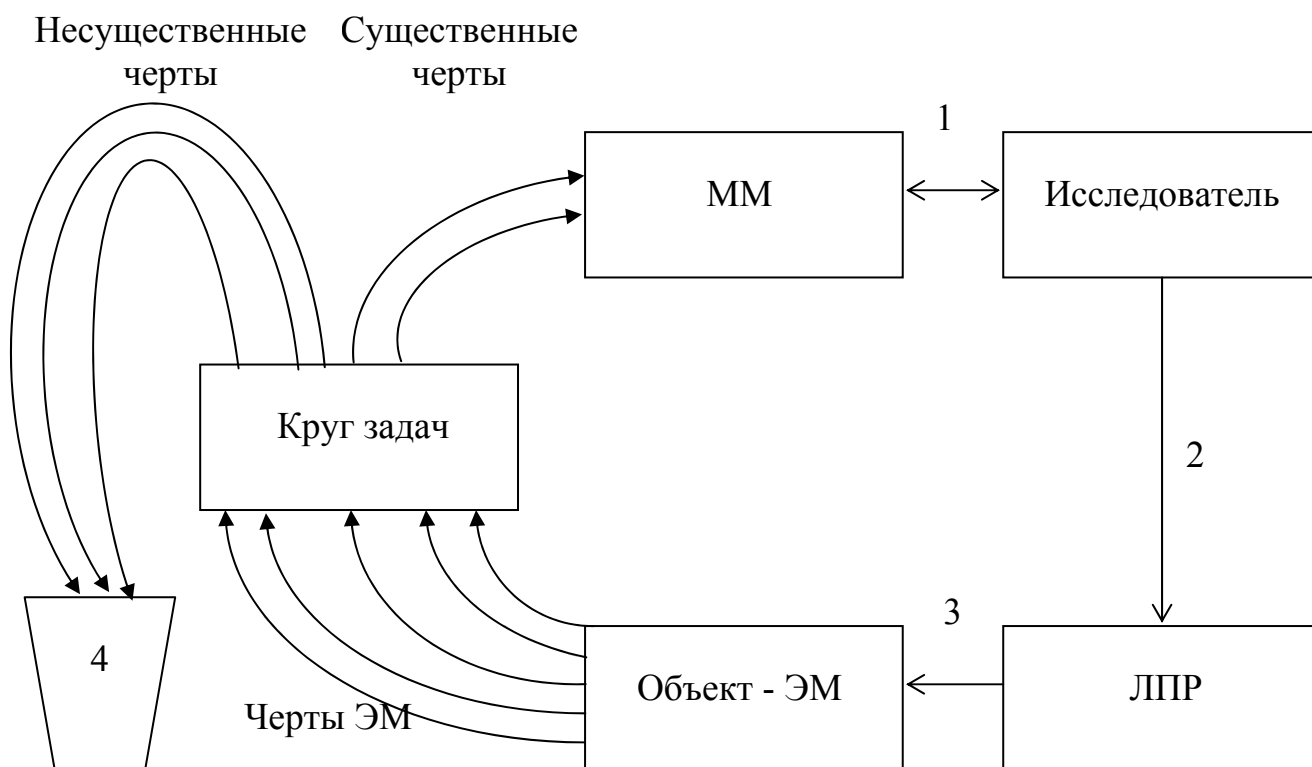


Рисунок 2.3 - Процесс совершенствования ЭМ

свойства объекта.

Как из рисунка 2.3 процесс совершенствования объекта имеет циклический характер. На первом этапе все черты объекта разделяются на существенные и несущественные. Это наиболее ответственный этап моделирования. Существенные черты в виде математических выражений составляют математическую модель (ММ на рисунке 2.3). Изучая объект по математической модели, исследователь разрабатывает предложения по его совершенствованию. Эти предложения в виде организационных, технических, административных и финансовых мер реализуются лицами, принимающими решения (ЛПР). Свойства усовершенствованного объекта подтверждают или опровергают адекватность модели. В последнем случае исследователь должен пересмотреть состав существенных черт и вновь повторять цикл до тех пор, пока адекватность ММ не будет подтверждена.

2.4 Параметрические модели и их обоснование

Параметрические модели являются одной из форм вышеупомянутого компромисса. Они сочетают в себе неотъемлемые свойства ЭМ (элементы структуры и характер их взаимодействия), описанные в дифференциальной форме, и детали, описанные интегрально, в форме параметров структуры. Через сосредоточенные параметры детали и тонкие явления включаются в математическую модель с достаточной полнотой (если параметры определены расчетным путем) или во всей полноте (если параметры определены экспериментально), но в виде интегралов соответствующих функций. Таким образом, удастся «в среднем» учесть тонкие явления, не повышая при этом порядка математической модели.

Характерно место, занимаемое параметрическими моделями на иерархической лестнице. Им соответствуют средние ступени иерархии. Ниже располагаются низкодетализированные полевые модели. Они базируются на уравнениях математической физики и, как правило, представляют ЭМ одноэлементной или двухэлементной структурой. Примером такой модели является уравнение конвективной диффузии, описывающее диффузию физического (теплового или электромагнитного) поля в движущуюся среду. Этот процесс реализуется практически всеми существующими типами ЭМ. Другим характерным примером являются интегральные теоремы Остроградского – Гаусса и Умова – Пойнтинга, описывающие в наиболее общем виде баланс мощности ЭМ. Полевые модели нижних уровней исчерпывают себя тогда, когда представление об ЭМ, как о структуре 1 – 2 порядка оказывается слишком грубым. Становится необходимым выделять обмотки и фазы, описывать характер их взаимодействия. Таким образом, на уровнях 3 – 4 полевые модели заменяются параметрическими.

Выше параметрических - располагаются высокодетализированные полевые модели. Так как порядок модели всей машины здесь весьма высок, приходится от моделирования ЭМ переходить к моделированию её фрагментов. Соответствующие примеры читатель может найти в любом издании по

электромагнитным расчетам электрических машин. Верхняя граница области параметрических моделей располагается на тех уровнях иерархии, на которых включение в модель элемента или свойства в интегральном виде оказывается неэффективным. Так, например, оптимизацию конфигурации пазов ЭМ неэффективно базировать на интегральном понятии «коэффициент зубчатости», а на этапе интегральной оценки оптимизации использование этого коэффициента вполне оправдано.

Заметим кроме того, что каждой из выделенных выше групп математических моделей соответствует свой характерный тип исследователей. Так, для первой группы характерен ученый – теоретик в области электротехники и электромеханики, для третьей – специалист в области тонкой проектировочной оптимизации. Параметрическими моделями обычно оперируют специалисты в области управления и структурной оптимизации ЭМ. Для них характерен «внешний взгляд» на электрическую машину. Эту категорию исследователей интересуют, прежде всего, интегральные величины: токи, мощности, момент, ЭДС, температуры, активные сопротивления, индуктивности, момент инерции. Законы распределения этих величин в виде физических полей и их характеристик отодвигаются на второй план. Именно интегральные величины позволяют оценить технико-экономические и энергетические качества ЭМ, через интегральные величины организуется управление ею. Поэтому представление физических полей в виде интегралов оказывается для исследователей этой категории, в силу характера их задач, минимально достаточным, а параметрический уровень – вполне обоснованным.

В качестве иллюстрации вышеприведенных соображений рассмотрим представление тока ЭМ на уровнях параметрической (макро) и полевой (микро) моделей. На уровне микромодели ток представляется вектором плотности в ортогональных фазных координатах

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_A \\ j_B \\ j_C \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{h} = \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) \vec{n}_A + \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \vec{n}_B + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \vec{n}_C,$$

где $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}$ вектор напряженности магнитного поля; выражения в скобках -

координаты вектора плотности тока j_A , j_B и j_C ; \vec{n}_A , \vec{n}_B и \vec{n}_C - орты векторного пространства.

На уровне макромодели ток представляется интегральным значением по некоторой поверхности S , которую пересекают все микроток

$$\begin{aligned} \bar{i}_S = \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \int \bar{j} dS = \left[\int \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) dS \right] \bar{n}_A + \left[\int \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) dS \right] \bar{n}_B + \\ + \left[\int \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) dS \right] \bar{n}_C, \end{aligned}$$

где выражения в квадратных скобках – координаты вектора тока i_A , i_B и i_C . Очевидно, что возможны любые перераспределения полей микротоков (выражений в круглых скобках) в рамках неизменности макроток (выражений в квадратных скобках). При сохранении этой неизменности вышеприведенные микро и макро представления будут интегрально эквивалентны.

Аналогичные выводы можно сделать относительно полей вектора магнитной индукции, электрической напряженности, микронапряжений, интегрально представленных в параметрических моделях векторами фазных потокосцеплений $\bar{\psi}$, ЭДС \bar{e} , и напряжений \bar{u} . Интегральная эквивалентность электромагнитных величин приводит к интегральной эквивалентности полей мощности и мощностей ЭМ (\bar{u}, \bar{i}) , (\bar{e}, \bar{i}) , причем как по величине, так и по роду мощности. Более сопоставление описаний ЭМ на уровне микро- и макро моделей приведено в [16].

Подводя итог, отметим, что переход с полевого на параметрический уровень означает переход от пространственно-временных вектор-функций типа $\bar{j}(x, y, z, t)$ к временным вектор-функциям типа $\bar{i}(t)$, причем первый и второй математические объекты интегрально эквивалентны. Временные вектор-функции \bar{i} , $\bar{\psi}$, \bar{e} , \bar{u} обладают свойством минимальной достаточности информации для решения задач структурной оптимизации и управления ЭМ.

2.5 Электрическая машина как линейный оператор

Согласно (1.1) на параметрическом уровне представлений электрическая машина является линейным оператором с матрицей $Z = Z\left(\theta, \frac{d}{dt}\right)$ по (1.8), осуществляющим преобразование координат

$$\bar{u} = Z \bar{i} \quad (2.1)$$

в векторном пространстве токов

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{i}_S \\ \bar{i}_r \end{pmatrix}.$$

Угол θ связывает базисы, в которых записаны векторы \bar{i}_S, \bar{i}_r в уравнении (1.1).

В электрической машине преобразование реализуется в виде двух независимых частных операций или двух независимых движений по обобщенным координатам \bar{i} и θ .

$$\bar{u} = Z \left(\theta = \text{const}, \frac{d}{dt} \right) \bar{i} + \frac{d\theta}{dt} \cdot \left(dt \cdot \frac{\partial Z(\theta, \frac{d}{dt})}{\partial \theta} \right) \bar{i} \quad (2.2)$$

Первая частная линейная операция реализуется матрицей Z в предположении $\theta = \text{const}, \bar{i} = \bar{i}(t)$

$$\begin{pmatrix} Z_s & M_{rs}(\theta = \text{const}) \\ M_{sr}(\theta = \text{const}) & Z_r \end{pmatrix} \cdot \bar{i}.$$

Это "электрическое" движение имеет мощность

$$\Sigma p_{эл} = \left(\bar{i}, \begin{pmatrix} Z_s & M_{rs}(\theta = \text{const}) \\ M_{sr}(\theta = \text{const}) & Z_r \end{pmatrix} \bar{i} \right),$$

представляющую собой совокупную мощность электрических и магнитных цепей ЭМ.

Вторая частная линейная операция реализуется матрицей Z в предположении $\theta = \theta(t), \bar{i} = \text{const}$

$$\frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \theta}(dt \cdot M_{rs}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(dt \cdot M_{sr}) & 0 \end{pmatrix} \bar{i}.$$

Это "механическое" движение имеет мощность

$$p_{мех} = \frac{d\theta}{dt} \left(\bar{i}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \theta}(dt \cdot M_{rs}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(dt \cdot M_{sr}) & 0 \end{pmatrix} \bar{i} \right),$$

представляющую собой мощность механического входа ЭМ.

Совокупная мощность линейного оператора

$$p_{эл} = (\bar{i}, \bar{u}) = (\bar{i}, Z \bar{i}) = \Sigma p_{эл} + p_{мех}$$

представляет собой мощность электрического входа ЭМ.

В параграфе 2.1 уже отмечались последствия придания модели формы математического выражения (2.1): ММ как математический объект имеет весьма мощные и разнообразные инструменты исследования в виде математических методов, поддерживаемых средствами вычислительной техники. Этот вывод столь очевиден, что выглядит тривиальным. На другое следствие математической символики модели обращают внимание относительно редко.

Обратимся вновь к свойству классовости модели. Каждый объект класса имеет групповые и индивидуальные свойства. Групповые свойства одинаковы у всех объектов данного класса, независимо от их физической природы. В форме математических выражений они сосредоточены в математической модели, поскольку она и является классообразующим признаком. Здесь имеется в виду, прежде всего, одинаковый для всех объектов класса закон движения (реального или виртуального). Так, для объектов класса "Линейный оператор простой

структуры" (в частности - для электрических машин) закон движения даётся выражением

$$\bar{i} = Z^{-1} \bar{u}. \quad (2.3)$$

Модификации фазовых траекторий объекта в векторном пространстве \bar{i} , в предположении фиксированности внешнего воздействия \bar{u} , возможны только посредством вариаций матрицы линейного оператора Z для конкретных объектов класса.

Свойства электрических машин, определяющие их фазовые траектории

$$\bar{i}(\theta) = Z^{-1}(\theta) \bar{u}$$

будем называть топологическими свойствами ЭМ.

В соответствии с этим определением, к топологическим свойствам отнесены свойства параметрической матрицы Z , векторного пространства \bar{i} и поля мощности ЭМ.

Индивидуальными свойствами объекта являются его физические свойства. Они заключены в параметры Z и физическое содержание переменных \bar{u}, \bar{i}, θ . Подчеркнём ещё раз: физическое содержание движения объекта существенно только для этапа оценки возможных траекторий движения $\bar{i}(\theta)$. Их необходимо оценивать с позиций осуществимости, целесообразности и эффективности именно для конкретного объекта – электрической машины. На этапе моделирования, то есть на этапе математического исследования возможных фазовых траекторий, на переднем плане перед исследователем находятся топологические свойства ЭМ.

В связи с этим возникает ряд весьма существенных для характеристики ЭМ и её эксплуатации вопросов. Какова размерность векторного пространства и однородно ли оно в параметрическом отношении? К какому классу матриц принадлежит Z ? Каковы её собственные векторы и собственные числа? Каковы ранги матриц? Каковы характеристики поля мощности пространства? Имеются ли в нём турбулентности (обмены)? Имеются ли возможности влияния на турбулентности внешним воздействием? Какие состояния и движения объекта реализуемы в векторном пространстве? Насколько они энергетически эффективны?

Можно подумать, что эти и другие аналогичные вопросы существенны для математика, собирающегося получить решение (2.3). Это не так. Адекватность следует понимать так, что не только модель адекватна объекту, но и объект адекватен модели. Они равноправные, хотя и формальные, аналоги. Поэтому те или иные топологические свойства могут появиться в выражении (2.1) только потому, что они физически реализованы в электрической машине как в структуре. Конечно, ЭМ не имеет числа строк и столбцов, но она имеет число фаз, совпадающее с числом строк и столбцов матрицы Z . Она не имеет определителя, но имеет характеристические сопротивления токам прямой, обратной и нулевой последовательности, произведение которых и даёт определитель матрицы Z . ЭМ не имеет собственных векторов и собственных чисел, но имеет характерные наборы токов, которым оказывает разные

сопротивления. Электрическая машина существует в физическом пространстве, но электрически движется в векторном пространстве (см. выражение (2.2)). Другими словами, факт физического существования электрической машины не отменяет её топологических свойств, концентрированно выраженных математической моделью. Если бы это было не так, то адекватность ЭМ и её модели была бы невозможна.

Осознание этого факта дает возможность понять, как много информации об ЭМ заключено в формальных свойствах выражения (2.1). При всей важности физического содержания решения (2.3), оно является лишь реализацией топологических свойств выражения (2.1). Недвусмысленно на это указывает и выражение (2.3), которое можно прочесть следующим образом. В данной ЭМ физически реализуемы лишь такие токи, которые определены свойствами обратной матрицы Z^{-1} . Факт существования обратной матрицы, её свойства, единственность решения (2.3) – это предметы топологического исследования уравнения (2.1).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что исследование топологических свойств – важнейшая составляющая исследования электромагнитных и энергетических процессов в электрических машинах.

2.6 Контрольные вопросы

1. Дайте определение математической модели (ММ).
2. С чем связана приближенность ММ?
3. От чего зависят допустимые погрешности ММ?
4. С чем связана классовость ММ?
5. К какому классу объектов принадлежат электрические машины? Назовите другие объекты этого класса?
6. Что такое "линейный оператор"?
7. Какие частные линейные операции включает в себя электромеханическое преобразование энергии?
8. Каковы следствия математической формы ММ?
9. Каково основное требование, предъявляемое к ММ?
10. Поясните смысл выражения "адекватность ММ и объекта".
11. В каких случаях ММ адекватна объекту?
12. В чём заключена ограниченность ММ?
13. Поясните смысл выражения "иерархичность ММ".
14. Охарактеризуйте основные уровни иерархии ММ электрической машины.
15. Какую роль играют ММ в процессе совершенствования электрических машин?
16. Что такое "единое пространство задач"?
17. Что такое "параметрическая модель" ЭМ?
18. Какие свойства ЭМ относят к категории топологических свойств?
19. Какое значение имеет исследование топологических свойств для процесса совершенствования ЭМ?

3 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ СОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБМОТОК

3.1 Общие положения

Под матрицами собственных параметров обмоток подразумеваются матрицы Z_s и Z_r , входящие в (1.1) и (1.6). В соответствии с выражением (1.6), в энергетических процессах в ЭМ участвуют две подсистемы – обмотки статора и ротора. Электромеханическое преобразование описывается преобразованиями координат $abc \Rightarrow ABC$ и $ABC \Rightarrow abc$, реализуемыми матрицами M_{rs} и M_{sr} (см. выражение (1.7)). Энергетическая эффективность преобразования зависит не только от того насколько удачно организовано взаимодействие обмоток, но и от того насколько энергетически эффективны сами обмотки. Можно подумать, что это вопрос проектировочный и технологический, что эффективность обмоток однозначно определена величинами параметров фаз, заложенными в матрицы Z_s и Z_r . Но это не совсем так: не только величинами, но и их соотношениями. Не следует забывать, что многофазная обмотка это структура, а у структур свои законы энергопотребления, также заложенные в матрицы Z_s и Z_r . (Термин «энергопотребление» здесь и далее распространяется и на реактивную мощность). Действительно, если Z - любая из этих матриц, а \bar{i} - один из токов (статора или ротора), то соответствующей мощности можно придать следующий вид

$$p = (\bar{i}, Z \bar{i}) = \lambda_{\varphi} |\bar{i}|^2 \cos^2(\varphi)$$

где $\lambda_{\varphi} = \frac{p}{|\bar{i}|^2}$ имеет смысл одной из норм матрицы Z , консолидировано

отображающей величины параметров фаз, φ - угол, задающий положение вектора \bar{i} в пространстве и консолидировано отображающий соотношения между параметрами фаз. Из приведенного выражения следует, что мощность является функцией не только величин параметров, но и их соотношений.

Входящие в Z_s и Z_r матрицы $Z_{\sigma s}, M_s$ и $Z_{\sigma r}, M_r$ ничем принципиально не отличаются от матриц M_{rs} и M_{sr} ни в смысле структуры, ни в смысле физической реализации. Правда, их элементы не зависят от угла θ (впрочем, «не зависят» только в неявнополюсной машине), но они и не принимают прямого участия в электромеханическом преобразовании. Они его поддерживают, осуществляя, подобно трансформатору, «электроэлектрическое» преобразование посредством преобразований координат $ABC \Rightarrow ABC$ и $abc \Rightarrow abc$. Энергетическим содержанием преобразований является то, что каждая из них формирует поле мощности симметрично собственным главным осям. При этом каждая из обмоток, своими подсистемами (матрицами рассеяния и главных индуктивностей), разделяет общий поток мощности, идущий от источника, на поток, который она

потребляет (рассеивает или накапливает), и поток, который циркулирует в структуре в форме поперечного энергообмена.

Ниже анализируются топологические свойства параметрических матриц Z_s и Z_r обмоток ЭМ. При этом следует иметь в виду, что матрицы собственных параметров статора и ротора имеют аналогичную структуру и, следовательно, аналогичные топологические свойства. Поэтому выводы, полученные для матриц статора по выражениям (1.2) – (1.4), следует распространить и на соответствующие матрицы ротора. Особенности параметрических матриц короткозамкнутых клеток ротора анализируются отдельно.

3.2 Матрицы параметров рассеяния

Матрицы параметров рассеяния имеют вид

$$Z_{\sigma s} = \begin{pmatrix} R_A + l_{\sigma A} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & R_B + l_{\sigma B} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & R_C + l_{\sigma C} \frac{d}{dt} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

и осуществляют линейную операцию по преобразованию координат $ABC \Rightarrow ABC$. В общем случае, когда параметры фаз различны (несимметричная ЭМ), это преобразование общего типа. В частном случае симметричного рассеяния, параметрической матрицей

$$Z_{\sigma s} = (R + l_{\sigma} \frac{d}{dt}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

осуществляется масштабное преобразование. Преобразование имеет мощность, которую называют мощностью рассеяния обмотки

$$p_{\sigma s} = (\bar{i}_s, Z_{\sigma s} \bar{i}_s). \quad (3.2)$$

Ей в общем случае сопутствует поперечный энергообмен между фазами источника питания и обмотки.

Собственные числа матрицы рассеяния равны параметрам фаз

$$\lambda_A = R_A + l_{\sigma A} \frac{d}{dt}, \quad \lambda_B = R_B + l_{\sigma B} \frac{d}{dt}, \quad \lambda_C = R_C + l_{\sigma C} \frac{d}{dt},$$

а собственные векторы совпадают с осями осей фаз

$$\bar{n}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для матриц рассеяния базис фазных осей является каноническим базисом, фазные токи одновременно являются каноническими, а

поверхности уровня поля мощности $p_{\sigma S} = const$ симметричны относительно фазных осей. Вместе с тем, при фиксированном потребляемом токе

$$|\bar{i}_S| = \sqrt{i_A^2 + i_B^2 + i_C^2} = const$$

и, следовательно, приблизительно фиксированной мощности ЭМ, мощность рассеяния несимметричной обмотки может изменяться в широких пределах. На это указывает выражение

$$p_{\sigma S} = \lambda_A i_A^2 + \lambda_B i_B^2 + \lambda_C i_C^2 = (\lambda_A \cos^2(\varphi_A) + \lambda_B \cos^2(\varphi_B) + \lambda_C \cos^2(\varphi_C)) \cdot |\bar{i}_S|^2 \quad (3.3)$$

В частности, этому способствуют различие в собственных числах несимметричной обмотки и возможности различной ориентации вектора тока относительно фазных осей (углы $\varphi = \{\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C\}$). Пусть, например,

$$\lambda_A = R + l_\sigma \frac{d}{dt}, \quad \lambda_B = R + l_\sigma \frac{d}{dt}, \quad \lambda_C = 2 \cdot (R + l_\sigma \frac{d}{dt}).$$

Ориентация вектора тока задаётся множеством углов $\varphi_1 = \{0, 0, \pi\}$. Выражение (3.3) дает мощность

$$p_{\sigma S}(\varphi_1) = 4(R + l_\sigma \frac{d}{dt}) \cdot |\bar{i}_S|^2.$$

При другой ориентации того же тока $\varphi_2 = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ мощность рассеяния

$$p_{\sigma S}(\varphi_2) = (R + l_\sigma \frac{d}{dt}) \cdot |\bar{i}_S|^2$$

будет в четыре раза меньше. Это связано с тем, что во втором случае ток полностью выведен из высоко диссипативного векторного подпространства фазы C. Отметим, что ориентация вектора тока в пространстве определяется, прежде всего, главными матрицами собственных индуктивностей и матрицами взаимной индукции ЭМ.

3.3 Главные матрицы собственных индуктивностей

3.3.1 Расчетная модель обмотки. Симметрия главных матриц

Как объект моделирования обмотка представляет собой систему из n фаз, характеризуемых множеством операторных (или комплексных) сопротивлений рассеяния

$$\{z_{\sigma i} = r_i + jx_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (3.4)$$

и множеством сопротивлений самоиндукции и взаимоиндукции

$$\{jx_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad (3.5)$$

приведенных к частоте ω_1 . В этих множествах оператор

$$j = \sqrt{-1}$$

для синусоидальных токов частоты ω_1 . В остальных случаях

$$j = \frac{1}{\omega_1} \frac{d}{dt}.$$

Сопротивления x_{ik} называются главными индуктивными сопротивлениями фаз при выполнении равенства $k=i$ и сопротивлениями взаимной индукции - при $k \neq i$.

Следует подчеркнуть тот факт, что разделение индуктивных сопротивлений на сопротивления рассеяния, главные и взаимные достаточно условно. Магнитное поле, существующее в зазоре ЭМ, представляет собой ряд, составленный из собственных функций дифференциального оператора, формирующего векторное поле. Для классических ЭМ это ряд пространственных гармоник вектора магнитной индукции. Для неклассических исполнений компонентами ряда могут быть и негармонические распределения этого вектора. Разделение компонент ряда по категориям "рассеяние", "главное поле", "поле взаимной индукции", отраженное в выражениях (3.4), (3.5), производится на основе представлений о существенности или несущественности включения данной компоненты ряда в ту или иную категорию поля. Для классических ЭМ главное поле и поле взаимной индукции (сопротивления x_{ik} в (3.5)) обычно ассоциируют с первой гармоникой ряда, а все остальные гармоники относят к полю дифференциального рассеяния. В этом случае сопротивления x_i в (3.4) обусловлено полями пазового, лобового и дифференциального рассеяния. В более общей ситуации поля высших гармоник могут учитываться параметрами x_{ik} , то есть классифицироваться как компоненты главного поля. Так обстоит дело, например, тогда, когда электромагнитные моменты, созданные пятой и седьмой гармониками поля трёхфазной ЭМ, существенны и соизмеримы с моментом первой гармоники. В этом случае дифференциальное рассеяние образуют гармоники, начиная с одиннадцатой. Для неклассических исполнений ЭМ понятие "дифференциальное рассеяние", как правило, не используется и все гармоники поля в зазоре учитываются через параметры x_{ik} . В дальнейшем изложении предполагается именно такая ситуация: параметры дифференциального рассеяния включены в x_{ik} , а в сопротивлениях x_i учтены только поля пазового и лобового рассеяния. Противные случаи в тексте оговорены особо.

Индуктивные сопротивления самоиндукции и взаимной индукции x_{ik} зависят от формы магнитных полей фаз и их чисел витков. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что все фазы приведены к одному числу витков, но имеют, в общем случае, разные формы магнитных полей. Следствием этого является то, что главные индуктивные сопротивления фаз в общем случае различны

$$x_{11} \neq x_{22} \neq \dots \neq x_{mm}$$

Подобная ситуация характерна для магнитного поля и параметров линейных асинхронных двигателей (ЛАД). Для трехфазного ЛАД, одна из фаз которого (с номером 2) размещена по оси симметрии магнитной системы, а две другие (с

номера 1 и 3) размещены симметрично относительно краёв магнитной системы, справедливо

$$x_{22} > x_{11} = x_{33}.$$

Что касается сопротивлений междуфазной взаимной индукции

$$\{x_{ik}, i, k = 1, 2, \dots, n, k \neq i\},$$

то они тождественно попарно приведены к одной форме поля – совокупности общих компонент (для вращающихся ЭМ – гармоник) магнитного поля i -той и k -той фаз. Поэтому для сопротивлений x_{ik} справедлива запись

$$x_{ik} \equiv x_{ki}, i, k = 1, \dots, n, k \neq i, \quad (3.6)$$

являющаяся математической формулировкой принципа взаимности Максвелла для линейных электрических и магнитных цепей.

Приведенные выше положения образуют расчетную модель обмотки. Она позволяет утверждать, что для обмоток ЭМ матрица индуктивных сопротивлений

$$M_S = j(x_{ik}), i, k = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

является, в силу (3.6), матрицей симметрической, то есть матрицей, для которой справедливо

$$M_S^t = M_S,$$

где M_S^t - матрица, транспонированная по отношению к M_S .

Таким образом, главная матрица собственных индуктивных сопротивлений для несимметричной трёхфазной обмотки имеет вид

$$M_S = j \begin{pmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_{22} & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_{33} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Симметричным обмоткам присущи симметрические параметрические матрицы, у которых совпадают элементы на главной диагонали

$$x_{11} = x_{22} = \dots = x_{nn} = x_{2n}.$$

Это так называемые матрицы тёплицева типа или матрицы Тёплица (*Toeplitz*).

У матриц Тёплица совпадают также элементы на любой диагонали, параллельной главной. Для матрицы симметричной трёхфазной обмотки справедлива запись

$$M_S = j \begin{pmatrix} x_{2n} & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_{2n} & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_{2n} \end{pmatrix} = jx_{2n} \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где $c = \frac{x_1}{x_{2n}}$ - относительная величина сопротивления взаимной индукции.

Выражение (3.9) представляет собой частный случай выражения (3.8), соответствующий симметрии фаз, поэтому далее будем иметь в виду несимметричную обмотку и выражение (3.8).

3.3.2 Энергетические свойства главных матриц

Главная матрица собственных индуктивных сопротивлений M_S по (3.8) является симметрической матрицей, что имеет три следствия:

- собственные числа матрицы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - действительны;

- учитывая справедливость для всех ЭМ, того факта, что сопротивление междуфазной взаимной индукции не больше сопротивления фазной самоиндукции $x_1, x_2, x_3 \leq x_{11}, x_{22}, x_{33}$, можно утверждать, что собственные числа матрицы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ неотрицательны;

- матрица M_S по (3.8) всегда и единственным образом приводима к диагональному виду путем канонического преобразования координат.

Матрица осуществляет координатное преобразование общего типа $ABC \Rightarrow ABC$

$$M_S \bar{i}_S.$$

Мощность преобразования

$$p = (\bar{i}_S, M_S \bar{i}_S) = (\tilde{i}_S, \tilde{M}_S \tilde{i}_S) \quad (3.10)$$

где \tilde{i}_S - вектор тока в базисе собственных векторов матрицы M_S ,

$$\tilde{M}_S = j \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

- матрица M_S после канонического преобразования координат.

С точки зрения классификации и анализа свойств матрицы существенны значения суммы элементов любой строки (столбца) M_S , а также значения и группировка собственных чисел.

Назовем вектор

$$\bar{i}_{S0} = i_{S0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3} i_{S0} \bar{n}_0, \quad (3.12)$$

где $3 \cdot i_{S0}$ - сумма фазных токов, $\bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - орт подпространства величин

нулевой последовательности, вектором тока нулевой последовательности обмотки статора в базисе фазных осей. Тогда линейное преобразование этого тока даётся выражением

$$M_S \bar{i}_{S0} = j i_{S0} \begin{pmatrix} x_{11} + x_1 + x_2 \\ x_1 + x_{22} + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_{33} \end{pmatrix} = j i_{S0} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Согласно (3.13) суммы элементов строк (столбцов) матрицы M_S представляют собой сопротивления фаз обмотки току нулевой последовательности.

Выражение (3.13) свидетельствует о том, что возможны две ситуации.

Частный случай имеет место, когда сопротивления фаз для тока нулевой последовательности одинаковы

$$x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{s0}.$$

Он характерен для обмоток несимметричных (в частном случае – симметричных) трансформаторов и вращающихся ЭМ. Тогда в линейном преобразовании матрица M_S представляет собой сумму матриц

$$M_S = M_{S12} + M_{S0},$$

где

$$M_{S12} = j \begin{pmatrix} x_{11} - \frac{1}{3}x_{s0} & x_1 - \frac{1}{3}x_{s0} & x_2 - \frac{1}{3}x_{s0} \\ x_1 - \frac{1}{3}x_{s0} & x_{22} - \frac{1}{3}x_{s0} & x_3 - \frac{1}{3}x_{s0} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_{s0} & x_3 - \frac{1}{3}x_{s0} & x_{33} - \frac{1}{3}x_{s0} \end{pmatrix}$$

- матрица, сумма элементов любой строки (столбца) которой равна нулю,

$$M_{S0} = j \frac{1}{3} x_{s0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица параметров нулевой последовательности.

Преобразование тока матрицей M_S в этом случае явно выделяет подпространство нулевой последовательности, заданное ортом \bar{n}_0 и ортогональное ему подпространство – подпространство величин прямой и обратной последовательностей (индекс "12")

$$\begin{aligned} M_S \bar{i}_S &= M_{S12} \bar{i}_S + M_{S0} \bar{i}_S = M_{S12} \bar{i}_S + x_{s0} \bar{i}_{s0} = \\ &= M_{S12} (\bar{i}_S - \bar{i}_{s0}) + x_{s0} \bar{i}_{s0} = M_{S12} \bar{i}_{S12} + x_{s0} \bar{i}_{s0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

При записи (3.13) использовано выражение (3.12), введено обозначение $\bar{i}_{S12} = \bar{i}_S - \bar{i}_{s0}$ для компоненты статорного тока в подпространстве ортогональном \bar{n}_0 . Кроме того учтено, что

$$M_{S12} \bar{i}_{s0} = 0,$$

так как матрица имеет нулевые суммы элементов строк. Учитывая факт ортогональности векторов $\bar{i}_{S12}, \bar{i}_{s0}$, выраженный равенством

$$(\bar{i}_{S12}, \bar{i}_{s0}) = 0,$$

приходим к выводу о том, что согласно (3.14) потоки мощности подпространств в общем случае не разделяются

$$p = (\bar{i}_S, M_S \bar{i}_S) = (\bar{i}_S, M_{S12} \bar{i}_{S12}) + x_{s0} |\bar{i}_{s0}|^2.$$

Действительно, в данной ситуации подпространства "0" и "12" ортогональны, но зависимы в электромагнитном и энергетическом отношении. Это связано с тем, что преобразование $M_{S12} \bar{i}_{S12}$ для параметрически неоднородного подпространства имеет общий тип (см. раздел 1)

$$M_{S12} \bar{i}_{S12} = \lambda_{12} \bar{i}_{S12} + \lambda_{120} \bar{i}_{s0},$$

что приводит к передаче мощности $p_{120} = \lambda_{120} |\bar{i}_{S0}|^2$ из подпространства в подпространство

$$p = \lambda_{12} |\bar{i}_{S12}|^2 + \lambda_{120} |\bar{i}_{S0}|^2 + x_{S0} |\bar{i}_{S0}|^2. \quad (3.15)$$

Заметим по выражению (3.15), что, характерный для ЭМ, факт небольшой величины параметра $x_{S0} \approx 0$ не даёт оснований для пренебрежения процессами в этом подпространстве.

Если же, кроме того, подпространство "12" параметрически однородно, то преобразование $M_{S12} \bar{i}_{S12}$ имеет масштабный тип. Для него справедливы записи

$$\begin{aligned} M_{S12} \bar{i}_{S12} &= \lambda_{12} \bar{i}_{S12}, \\ (\bar{i}_0, M_{S12} \bar{i}_{S12}) &= 0 \end{aligned}$$

и

$$p = (\bar{i}_S, M_S \bar{i}_S) = \lambda_{12} |\bar{i}_{S12}|^2 + x_{S0} |\bar{i}_{S0}|^2. \quad (3.16)$$

Последняя ситуация характерна для симметричных трехфазных цепей, симметричных обмоток трансформаторов и вращающихся ЭМ. Для них подпространства "12" и "0" независимы в электромагнитном и энергетическом отношении. Математическое моделирование электромагнитных и энергетических процессов в подпространствах может быть проведено на двух независимых моделях с последующим суммированием мощности по выражению (3.16).

В самой общей ситуации, характерной для обмоток ЛАД, сопротивления фаз току нулевой последовательности различны

$$x_{10} \neq x_{20} \neq x_{30}.$$

В ней преобразование $M_S \bar{i}_S$ классифицируется, как преобразование общего типа. Это означает, что возбуждается поперечный энергообмен по причине электромагнитной и энергетической зависимости векторных подпространств тока.

3.3.3 Параметрические свойства главных матриц

Проанализируем собственные числа и собственные векторы матрицы M_S по выражению (3.8). Будем считать, что $x_{11} = x_{33}$ и $x_1 = x_3$. Эти предположения свидетельствуют о некоторой симметрии обмотки: фазы с номерами 1 и 3 одинаковы и отличаются от фазы с номером 2. В данном случае матрица M_S имеет вид

$$M_S = j \begin{pmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_{22} & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_{11} \end{pmatrix} = jx_{21} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где $x_{2l} = \frac{2x_{11} + x_{22}}{3}$, $a = \frac{x_{11}}{x_{2l}}$, $b = \frac{x_1}{x_{2l}}$, $c = \frac{x_2}{x_{2l}}$, $d = \frac{x_{22}}{x_{2l}}$ - относительные значения параметров.

В приводимых ниже примерах собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ находились как корни уравнения

$$f(\lambda) = jx_{2l} \begin{vmatrix} a - \lambda & b & c \\ b & d - \lambda & b \\ c & b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.18)$$

а собственные векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ - как решения уравнения

$$M_S \bar{v} = jx_{2l} \lambda \bar{v}. \quad (3.19)$$

В необходимых случаях собственные векторы подвергались процедуре ортогонализации.

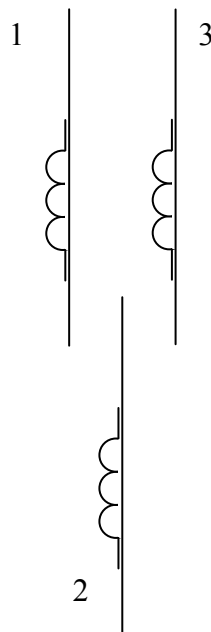


Рисунок 3.1 – Трехобмоточный трансформатор

3.3.3.1 Однофазный трехобмоточный трансформатор

Расположение фаз трансформатора показано на рисунке 3.1.

Главная параметрическая матрица обмотки трансформатора имеет вид

$$M_S = jx_{2l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ касается оси абсцисс в точке $\lambda = 0$ и пересекает её в точке $\lambda = 3$.

В соответствии с приведенными значениями векторное пространство трансформатора имеет подпространство размерности 2 (плоскость), токам которого

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2$$

(α, β - любые действительные числа или функции времени) соответствует нулевая главная мощность. Мощность этих токов

$$p_{oS} = (\bar{i}_S, Z_{oS} \bar{i}_S)$$

полностью рассеивается матрицей Z_{oS} .

Токам вида

$$\bar{i}_S = \gamma \bar{v}_3$$

(γ - любое действительное число или функция времени) соответствует максимальная удельная главная мощность $\lambda_3 = 3$. С токами вида $\gamma \bar{v}_3$ ассоциируется рациональная эксплуатация трансформатора. Очевидно, что комбинация вида

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3$$

для данного трансформатора в энергетическом отношении нерациональна.

3.3.3.2 Симметричная обмотка без дифференциального рассеяния

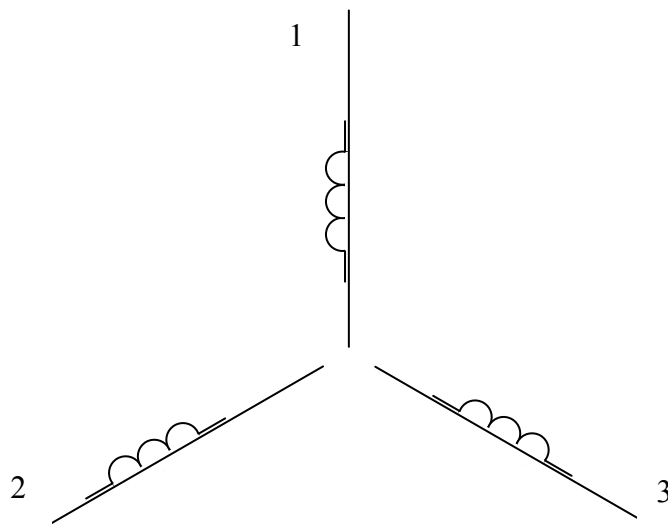


Рисунок 3.2 – Симметричная обмотка

У такой обмотки поля высших гармоник отнесены к полям рассеяния, а соответствующие им параметры включены в матрицу Z_{oS} . Фазы обмотки

показаны на рисунке 3.2. Собственные и взаимные индуктивности фаз определяются первой гармоникой поля вектора магнитной индукции

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{2l} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{2}$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ касается оси абсцисс в точке $\lambda = \frac{3}{2}$ и пересекает её в точке $\lambda = 0$.

В соответствии с приведенными значениями векторное пространство обмотки имеет параметрически однородное ($\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$) подпространство размерности 2 (плоскость), токам которого

$$\bar{i}_S = \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3 = \bar{i}_{S12}$$

соответствует ненулевая главная мощность. Так как суммы координат векторов \bar{v}_2, \bar{v}_3 равны нулю, то данным подпространством является подпространство токов прямой и обратной последовательности

Так как $\bar{v}_1 = \bar{n}_0$ (см. выражение (3.12)), то соответствующее подпространство является подпространством токов нулевой последовательности

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1 = \bar{i}_{S0},$$

мощность которого по главному полю равна нулю ($\lambda_1 = 0$).

С токами вида \bar{i}_{S12} ассоциируется рациональная эксплуатация обмотки, а комбинация вида

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3$$

для данной обмотки нерациональна.

3.3.3.3 Симметричная обмотка с дифференциальным рассеянием

У такой обмотки поля высших гармоник отнесены к главному полю, а соответствующие им параметры включены в матрицу M_S . Фазы обмотки показаны на рисунке 3.2. Собственные и взаимные индуктивности обмотки определяются всеми гармониками поля вектора магнитной индукции.

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{21} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{12}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & 1 & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & -\frac{12}{25} & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = \frac{1}{25}, \lambda_2 = \frac{37}{25}, \lambda_3 = \frac{37}{25}$$

близки к собственным числам обмотки по подпункту 3.3.3.2.

Собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

совпадают с собственными векторами обмотки по подпункту 3.3.3.2

Характеристический полином $f(\lambda)$ касается оси абсцисс в точке $\lambda = \frac{37}{25}$ и

пересекает её в точке $\lambda = \frac{1}{25}$.

Об этой обмотке можно сказать практически все, что отмечено для обмотки по подпункту 3.3.3.2. Отличие состоит лишь в том, что теперь токам нулевой последовательности соответствует отличная от нуля удельная мощность $\lambda_1 = \frac{1}{25}$, определяемая полями высших гармоник.

3.3.3.4 Несимметричная обмотка с вырожденной матрицей и двумя разнородными подпространствами

Фазы обмотки показаны на рисунке 3.3. Для них характерно то, что угол между осями фаз 1 и 3

$$\frac{\pi}{2} < \gamma_{13} < \frac{2\pi}{3},$$

а фаза с номером 2 размещена симметрично относительно фаз 1 и 3.

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{21} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

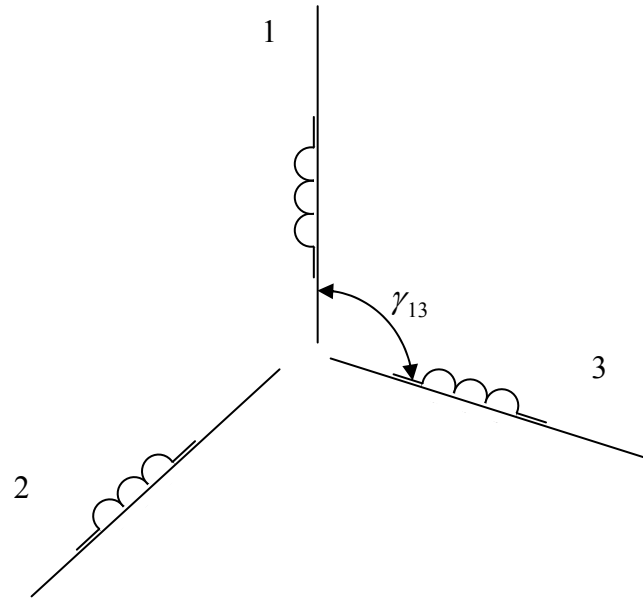


Рисунок 3.3 – Несимметричная обмотка

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = \frac{3}{2}$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ касается оси абсцисс в точке $\lambda = \frac{3}{2}$ и пересекает её в точке $\lambda = 0$.

Параметрические свойства обмотки аналогичны свойствам обмотки, описанной в подпункте 3.3.3.2. Особенность состоит в том, что подпространства

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1$$

и

$$\bar{i}_S = \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3$$

не являются подпространствами величин нулевой, и прямой и обратной последовательности. Токи $\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1$ имеют нулевую мощность относительно главного поля, поэтому их появление в обмотке нежелательно.

3.3.3.5 Несимметричная обмотка с вырожденной матрицей и тремя разнородными подпространствами

Фазы обмотки показаны на рисунке 3.3. Для них характерно то, что угол между осями фаз 1 и 3

$$\gamma_{13} = \frac{\pi}{2},$$

а фаза с номером 2, как и ранее, размещена симметрично относительно фаз 1 и 3.

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{2l} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ пересекает ось абсцисс в точках $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2$.

Особенностью данной обмотки является то, что все три подпространства параметрически разнородны. Удельные мощности подпространств по главному полю даются набором собственных чисел. Наибольшую энергетическую эффективность имеют токи

$$\bar{i}_S = \gamma \bar{v}_3$$

Нулевую эффективность по главному полю имеют токи

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1$$

Отметим, что подпространство

$$\beta \bar{v}_2$$

содержит величины прямой и обратной последовательностей, а подпространства $\alpha \bar{v}_1$ и $\gamma \bar{v}_3$ содержат величины всех трёх последовательностей.

3.3.3.6 Несимметричная обмотка с невырожденной матрицей и двумя разнородными подпространствами

Свойства такой обмотки проанализируем на двух характерных примерах.
Пример 1.

О расположении фаз обмотки даёт представление рисунок 3.3, если на нём изменить на 180 градусов расположение фазы с номером 2. При этом, как и в подпункте 3.3.3.4 угол между осями фаз 1 и 3

$$\frac{\pi}{2} < \gamma_{13} < \frac{2\pi}{3}.$$

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{2l} \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 2$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ касается оси абсцисс в точке $\lambda = \frac{1}{2}$ и пересекает её в точке $\lambda = 2$.

Параметрические свойства обмотки удобно анализировать в сравнении со свойствами обмотки, описанной в подпункте 3.3.3.4. Отличия состоят в следующем.

Векторное подпространство

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2$$

представляет собой параметрически однородную плоскость с отличной от нуля, но невысокой удельной мощностью $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. подпространство с высокой удельной мощностью

$$\bar{i}_S = \gamma \bar{v}_3$$

одномерно.

Пример 2.

Расположение фаз обмотки представлено на рисунке 3.3. Угол между осями фаз 1 и 3

$$\frac{\pi}{2} < \gamma_{13} < \frac{2\pi}{3}.$$

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{21} \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & -\frac{3\sqrt{2}}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{16} & \frac{7}{8} & -\frac{3\sqrt{2}}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{3\sqrt{2}}{16} & \frac{17}{16} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{5}{4}, \lambda_3 = \frac{5}{4}$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad .$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ касается оси абсцисс в точке $\lambda = \frac{5}{4}$ и пересекает её в точке $\lambda = \frac{1}{2}$.

В отличие от примера 1, здесь уже высокороботное подпространство

$$\bar{i}_S = \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3 \quad (3.20)$$

представляет собой плоскость. Значение этого факта состоит в том, что в плоскости возможны многофазные реализации тока \bar{i}_S , весьма желательные с точки зрения обеспечения качественных механических характеристик ЭМ. Высокое значение удельной мощности токов плоскости ($\lambda = \frac{5}{4}$) свидетельствует о низком уровне рассеяния при реализации тока \bar{i}_S по выражению (3.20).

Низкороботное подпространство

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1$$

одномерно. При реализации тока обмотки его желательно иметь пустым.

3.3.3.7 Несимметричная обмотка с невырожденной матрицей и тремя разнородными подпространствами

Фазы обмотки показаны на рисунке 3.3. Угол между осями фаз 1 и 3

$$\frac{\pi}{2} < \gamma_{13} < \frac{2\pi}{3}.$$

Главная параметрическая матрица обмотки имеет вид

$$M_S = jx_{21} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа по (3.18)

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{3}{2}$$

и собственные векторы по (3.19)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином $f(\lambda)$ пересекает ось абсцисс в точках $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = 1, \lambda = \frac{3}{2}$.

Свойства данной обмотки практически повторяют свойства обмотки по подпункту 3.3.3.5, с тем лишь отличием, что токам подпространства

$$\bar{i}_S = \alpha \bar{v}_1$$

соответствует отличная от нуля удельная мощность.

3.3.3.8 Общие выводы о параметрических свойствах обмоток

В данном параграфе на характерных примерах представлены параметрические свойства трехфазных обмоток, связанные с параметрами матриц рассеяния и главных параметрических матриц. Обмотки ЭМ являются параметрически анизотропными объектами с различными удельными мощностями векторного пространства по осям $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$. В зависимости от группировки параметров отдельные подпространства могут иметь размерность 1 или 2, внутри которых пространство является параметрически однородным. Существенное значение для эффективной работы ЭМ имеет удельная мощность данного направления или данной области пространства, выраженная соответствующим собственным числом параметрической матрицы. С этой точки зрения желательны подпространства большой размерности с высокими значениями собственного числа.

Параметрические свойства обмоток с числом фаз, отличным от трех, аналогичны свойствам приведенных выше обмоток с поправками на размерность векторного пространства, размерность его подпространств и кратность корней характеристического уравнения. Исключение составляют однофазные обмотки, в которых поперечный энергообмен отсутствует, в связи с отсутствием взаимной зависимости фаз.

3.4 Контрольные вопросы

1. К какому типу матриц относятся матрицы рассеяния ЭМ?
2. Каковы топологические свойства матриц рассеяния ЭМ?
3. Какие линейные преобразования осуществляются матрицами рассеяния?
4. В каких ситуациях имеет место масштабное линейное преобразование?
5. Каковы собственные числа и собственные векторы матриц рассеяния?
6. Почему мощность матриц рассеяния при фиксированном токе может изменяться в широких пределах?
7. К какому типу матриц относятся главные матрицы собственных индуктивных сопротивлений симметричных и несимметричных обмоток?
8. Какие линейные преобразования осуществляются главными параметрическими матрицами?
9. Каковы энергетические свойства главных параметрических матриц?
10. Каковы параметрические свойства главных параметрических матриц? Приведите примеры.

4 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОБМОТКАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

4.1 Общие положения

В данном разделе анализируются электромагнитные и энергетические процессы в тех элементах структуры ЭМ, которые описываются матрицами Z_s и Z_r (см. выражение (1.1)). Этим матрицам соответствуют процессы рассеяния и накопления энергии обмотками статора и ротора по отдельности. Подобно тому, как матрицы Z_s и Z_r являются неотъемлемыми составными частями объединённой параметрической матрицы машины Z по выражению (1.8), соответствующие им энергетические процессы в обмотках являются неотъемлемыми составными частями общего процесса в ЭМ. Предпринятый таким образом отдельный анализ отдельных сторон энергетического процесса позволяет оценить вклад, вносимый энергетическими качествами обмоток в общую энергетическую эффективность электрической машины.

Согласно выражению (1.1) электромагнитные и энергетические процессы в статоре и роторе аналогичны. Поэтому в тексте данной главы индексы "S" и "r" опущены. Под термином "обмотка" следует понимать любую из обмоток, представленную в третьем разделе пособия. Предполагается, что обмотка имеет n фаз, а векторы электромагнитных величин заданы в n -мерном евклидовом пространстве. Вместе с тем, выводы, относящиеся к нему, распространяются на векторы и комплексы эрмитова пространства. В некоторых случаях, для наглядности изложения, приводятся выражения и примеры, относящиеся к эрмитову пространству. Тогда используется общепринятая комплексная форма записи координат векторов и мощностей. В этом контексте следует иметь в виду, что мощности матрицы Z_s или Z_r

$$Z = Z_\sigma + M$$

в евклидовом пространстве соответствует запись

$$p_Z = (\bar{i}, Z i)$$

с оператором

$$j = \frac{d}{dt}.$$

В эрмитовом пространстве ей же соответствует запись

$$\dot{S}_Z = P + jQ = \tilde{I}' Z I$$

с оператором

$$j = \sqrt{-1}.$$

Под вектором \tilde{I}' следует понимать вектор сопряженный и транспонированный

по отношению к вектору $I = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dots \\ \dot{I}_n \end{pmatrix}$.

4.2 Продольный и поперечный энергетические процессы

На уровне собственной параметрической матрицы $Z = Z_\sigma + M$ обмотку описывает векторно-матричное выражение

$$Z \bar{i} = Z_\sigma \bar{i} + M \bar{i}, \quad (4.1)$$

где $\bar{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_n \end{pmatrix}$ - вектор тока в базисе фазных осей, Z_σ - матрица параметров

рассеяния, размером $n \times n$ элементов, аналогичная (1.2), M - главная матрица собственных индуктивностей, размером $n \times n$ элементов, аналогичная (1.3).

Представим в (4.1) вектор в виде суммы

$$\bar{i} = \bar{i}_d + \bar{i}_q. \quad (4.2)$$

В качестве слагаемых правой части (4.2) выберем вектор \bar{i}_d , представляющий собой составляющую тока \bar{i} , коллинеарную вектору главной ЭДС $M \bar{i}$

$$\lambda_\varnothing \cdot \bar{i}_d = M \bar{i}, \quad (4.3)$$

и вектор

$$\bar{i}_q = \bar{i} - \bar{i}_d = \frac{1}{\lambda_\varnothing} (\lambda_\varnothing E - M) \bar{i}. \quad (4.4)$$

Здесь λ_\varnothing - эффективное собственное число матрицы M , E - единичная матрица размером $n \times n$. Будем считать также, что векторы \bar{i}_d и \bar{i}_q ортогональны, что позволяет записать

$$(\bar{i}_d, \bar{i}_q) = 0. \quad (4.5)$$

Соотношения (4.2) – (4.5) дают возможность однозначно определить λ_\varnothing для данных \bar{i} и M . Векторы токов и ЭДС по (4.2) – (4.5) представлены на рисунке 4.1.

Выражение (4.2) с учетом (4.3) - (4.5) разделяет энергетический процесс в обмотке на две составляющие, называемыми «продольным» и «поперечным» процессами.

Содержанием продольного процесса (или d - процесса) является поддержание источником запасов энергии в главном магнитном поле. Процесс характеризуется током \bar{i}_d , главной мощностью обмотки

$$p = (\bar{i}_d, M \cdot \bar{i}) = \lambda_\varnothing |\bar{i}_d|^2 \quad (4.6)$$

и мощностью рассеяния

$$p_{\sigma d} = (\bar{i}_d, Z_\sigma \bar{i}). \quad (4.7)$$

Содержанием поперечного процесса (или q - процесса) является энергообмен фаз источника и обмотки. Процесс характеризуется током \bar{i}_q , нулевым значением главной мощности (см. выражение (4.5))

$$(\bar{i}_q, M \bar{i}) = \lambda_\varnothing (\bar{i}_q, \bar{i}_d) = 0 \quad (4.9)$$

и мощностью рассеяния

$$p_{\sigma q} = (\bar{i}_q, Z_{\sigma} \bar{i}) \neq 0. \quad (4.10)$$

В частном случае однородной матрицы рассеяния

$$Z_{\sigma} = z_{\sigma} E,$$

выражение (4.9) даёт

$$p_{\sigma q} = z_{\sigma} |\bar{i}_q|^2.$$

Оценивая энергетическую эффективность обмотки отношением мощностей

$$\frac{p}{p_{\sigma}} = \frac{p}{p_{\sigma d} + p_{\sigma q}} = \frac{\lambda_{\mathcal{E}} |\bar{i}_d|^2}{(\bar{i}, Z_{\sigma} \bar{i})} = \lambda_{\mathcal{E}} \frac{\cos^2(\varphi)}{(\bar{i}_N, Z_{\sigma} \bar{i}_N)},$$

где \bar{i}_N - нормированный (единичный) ток \bar{i} , приходим к следующим выводам.

- Для обмотки с однородной матрицей рассеяния справедливо

$$\frac{p}{p_{\sigma}} = \frac{p}{p_{\sigma d} + p_{\sigma q}} = \lambda_{\mathcal{E}} \frac{\cos^2(\varphi)}{z_{\sigma}}.$$

- Эффективность обмотки максимальна при условии $p_{\sigma q} = 0$ или $\bar{i}_q = 0$. В этом же случае и угол $\varphi = 0$ (см. рисунок 4.1).

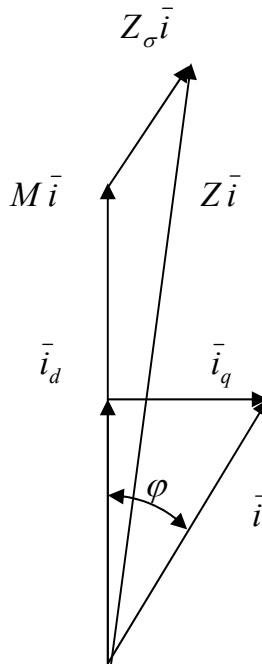


Рисунок 4.1 - Векторы электромагнитных величин

- Максимальная эффективность обмотки оценивается величиной

$$\left(\frac{p}{p_{\sigma}} \right)_{\max} = \frac{\lambda_{\mathcal{E}}}{z_{\sigma}}.$$

- Энергетическая эффективность обмотки существенно зависит от ориентации вектора тока в пространстве (от угла φ).

- Эти же выводы "в среднем" справедливы и для обмотки с неоднородным рассеянием. Для неё максимальная эффективность обмотки оценивается величиной

$$\left(\frac{p}{P_{\sigma}} \right)_{max} \approx \frac{\lambda_{\Sigma}}{z_{\sigma p}}$$

и имеет место при условии $\varphi \approx 0$. Степень приближения этих выражений тем выше, чем выше параметрическая однородность матрицы рассеяния.

- Из двух компонент тока только \bar{i}_d создаёт главную мощность обмотки p . В рассеянии энергии участвуют обе компоненты - \bar{i}_d и \bar{i}_q . Если мощность $p_{\sigma d}$ следует признать необходимой для создания главной мощности данного уровня p , то мощность $p_{\sigma q}$ при тех же условиях является избыточной.

В эрмитовом пространстве поперечный энергообмен на уровне фаз идет, в том числе, и в форме обменов активной мощностью. Действительно, мощность энергообмена между фазами с номерами i и k равна

$$P_{qik} = Re(j \cdot x_{ik} \cdot \dot{I}_k \cdot \tilde{I}_i) = -Re(j \cdot x_{ki} \cdot \tilde{I}_k \cdot \dot{I}_i), \quad i \neq k, \quad x_{ik} = x_{ki}. \quad (4.11)$$

Если просуммировать мощности всех межфазных энергообменов обмотки, получим полную мощность энергообмена в матрице M

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n Re(j \cdot x_{ik} \cdot \dot{I}_k \cdot \tilde{I}_i) = 0, \quad i \neq k, \quad (4.12)$$

что свидетельствует о том, что главное поле не совершает никакой необратимой работы. Мощность, возвращенная источнику одной из фаз обмотки, например k -той, передается им в другую фазу обмотки, например в i -тую. Рисунок 4.2 иллюстрирует природу и контур замыкания элементарного потока поперечной мощности P_{qik} . Утолщенными отрезками он показан на векторной диаграмме.

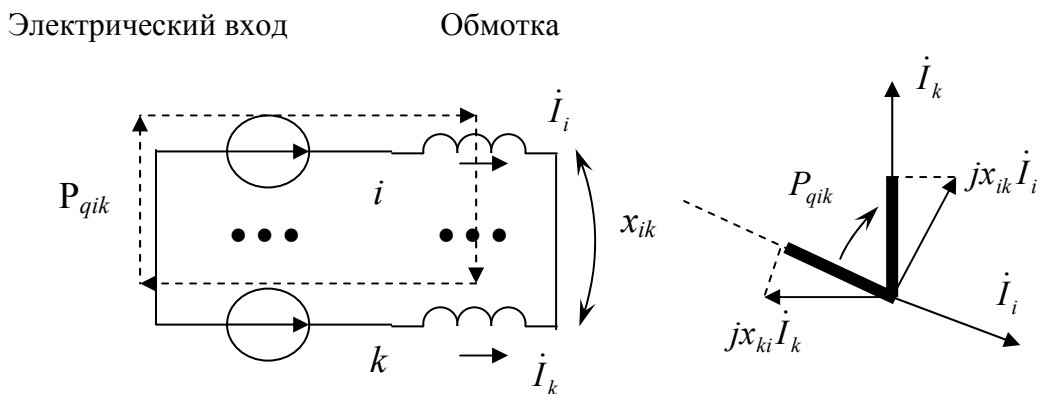


Рисунок 4.2 - Элементарный поток поперечной мощности

Таким образом, при синусоидальных токах и ЭДС потоки мощности поперечного энергообмена имеют двойные признаки. В силу выражения (4.11) это активная мощность, а в силу выражения (4.12) – реактивная мощность.

4.3 Особые токи в обмотках

Запишем выражение (4.4) в следующем виде

$$\bar{i}_q = \bar{i} - \frac{1}{\lambda_{\Sigma}} M \bar{i}. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) свидетельствует о том, что в состав тока \bar{i}_q входят компоненты двух видов.

Во-первых, это токи подпространств с номерами i ($1 \leq i \leq n$), для которых $\lambda_i > 0$. Для них справедливо

$$\bar{i}_{qi} = \bar{i}_i - \frac{1}{\lambda_{\Sigma}} M \bar{i}_i = \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\Sigma}}\right) \bar{i}_i = \bar{i}_i - \bar{i}_{di}. \quad (4.14)$$

Во-вторых, это токи подпространств с номерами k ($1 \leq k \leq n$), для которых $\lambda_k = 0$. Если такие подпространства у матрицы M имеются, то в них справедливы записи

$$M \bar{i}_k = \bar{0} \quad (4.15)$$

и

$$\bar{i}_{qk} = \bar{i}_k. \quad (4.16)$$

Токи, удовлетворяющие (4.15), (4.16) будем называть особыми токами. В силу (4.15) особым токам соответствует нулевое значение главной мощности

$$(\bar{i}, M \bar{i}_{qk}) = 0$$

и отличная от нуля мощность рассеяния

$$P_{\alpha qk} = (\bar{i}_{qk}, Z_{\sigma} \bar{i}) > 0$$

В примерах, приведенных в третьем разделе можно сразу выделить особые токи. Они принадлежат подпространствам с нулевыми собственными значениями.

Для однофазного трёхобмоточного трансформатора по подпункту 3.3.3.1 любой вектор тока, принадлежащий плоскости

$$\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2,$$

где α, β - любые действительные числа или функции времени,

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

является особым.

Для симметричной обмотки по подпункту 3.3.3.2 особым током является вектор вида

$$\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \bar{n}_0,$$

то есть ток нулевой последовательности.

Для асимметричных обмоток по подпунктам 3.3.3.4 и 3.3.3.5 особым током является вектор тока вида

$$\frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подводя итог, отметим, что в обмотках ЭМ могут существовать поперечные токи \bar{i}_q , а в их составе – особые, не поддерживающие запаса энергии в главном поле и создающие избыточное рассеяние. Рациональное питание требует исключения этих компонент из состава фазных токов, а, если это невозможно, то снижения их до минимума.

4.4 Баланс мощности обмотки и каноническое преобразование координат квадратичной формы главной мощности

Для того чтобы придать уравнению (4.1) форму баланса мощности, умножим его скалярно на вектор \bar{i} . После этого (4.1) приобретает вид

$$p_Z = p_\sigma + p, \quad (4.17)$$

где

$$p_Z = (\bar{i}, Z \bar{i}) \quad (4.18)$$

мощность матрицы Z ,

$$p_\sigma = (\bar{i}, Z_\sigma \bar{i}) \quad (4.19)$$

мощность рассеяния,

$$p = (\bar{i}, M \bar{i}) \quad (4.20)$$

главная мощность.

Поскольку фазные токи являются каноническими координатами тока в матрице рассеяния, постольку квадратичная форма (4.19) имеет канонический вид

$$p_\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_{\sigma i} i_i^2,$$

где $\lambda_{\sigma i} = R_i + l_{\sigma i} \frac{d}{dt}$ (см. также выражение (3.3)).

Преобразуем в выражении (4.20) вектор тока из фазных координат в канонический базис. Задача всегда разрешима для симметрических матриц квадратичных форм, какой и является матрица M . Преобразование координат осуществляется в соответствии с выражением

$$\bar{i} = V \cdot \tilde{i}, \quad (4.21)$$

где $\tilde{i} = \begin{pmatrix} \tilde{i}_1 \\ \dots \\ \tilde{i}_n \end{pmatrix}$ - вектор тока, записанный в канонических координатах. Матрица

преобразования координат V в (4.21) имеет в качестве столбцов ортонормированные собственные векторы матрицы M

$$V = (\bar{v}_i, i = 1, \dots, n), \quad (4.22)$$

соответствующие её собственным значениям $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Вектор \bar{i} по базису главных осей раскладывается следующим образом

$$\bar{i} = \sum_{i=1}^n \tilde{i}_i \cdot \bar{v}_i. \quad (4.23)$$

Главная ЭДС обмотки в том же базисе

$$M \bar{i} = \sum_{i=1}^n \tilde{i}_i \cdot M \cdot \bar{v}_i. \quad (4.24)$$

В соответствии с решением задачи о собственных значениях и собственных векторах матриц справедливо равенство

$$M \cdot \bar{v}_i = \lambda_i \cdot \bar{v}_i,$$

на основании которого получаем разложение вектора ЭДС по главным осям. Согласно (4.24), получаем

$$M \cdot \bar{i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \tilde{i}_i \cdot \bar{v}_i, \quad (4.25)$$

Таким образом, каноническими координатами вектора главной ЭДС являются произведения

$$\{\lambda_i \tilde{i}_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Далее, учитывая ортонормированность базисных векторов

$$(\bar{v}_i, \bar{v}_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad (4.26)$$

в соответствии с выражением (4.20), скалярно перемножаем векторы по (4.23) и (4.25). После этого квадратичная форма главной мощности приобретает канонический вид

$$p = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \tilde{i}_i^2. \quad (4.27)$$

Выражение (4.27) свидетельствует о том, что главная мощность обмотки определяется не квадратами фазных токов, а квадратами канонических координат вектора тока. Это обстоятельство обеспечивает определенную взаимную независимость p и \bar{i} , реализуемую поперечной составляющей тока. В частности, главная мощность не зависит от особых токов ($\lambda_i = 0$) и слабо зависит от токов низкодобротных подпространств ($\lambda_i \approx 0$).

Заметим, что для ортогональной матрицы V справедливо

$$V^{-1} = V^t.$$

Поэтому, обратное по отношению к (4.21) преобразование координат

$$\tilde{i} = V^{-1} \cdot \bar{i}, \quad (4.28)$$

определено и является единственным.

Теперь баланс мощности (4.17) можно записать в виде суммы двух квадратичных форм канонического вида

$$p_Z = \sum_{i=1}^n \lambda_{oi} i_i^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{i}_i^2. \quad (4.29)$$

первая из них имеет осями симметрии фазные оси, вторая – главные оси матрицы M .

4.5 Продольный и поперечный токи. Эффективное собственное число

Согласно (4.3) и (4.25), разложение продольного тока по векторам канонического базиса матрицы M имеет вид

$$\bar{i}_d = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\mathcal{D}}} \right) \tilde{i}_i \bar{v}_i. \quad (4.30)$$

подстановка выражений (4.23) и (4.30) в (4.4) даёт разложение поперечного тока

$$\bar{i}_q = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\mathcal{D}}} \right) \tilde{i}_i \bar{v}_i. \quad (4.31)$$

Таким образом, продольный и поперечный токи в каноническом базисе матрицы M записываются как

$$\tilde{i}_d = \frac{1}{\lambda_{\mathcal{D}}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \tilde{i}_1 \\ \dots \\ \lambda_n \tilde{i}_n \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

и

$$\tilde{i}_q = \frac{1}{\lambda_{\mathcal{D}}} \begin{pmatrix} (\lambda_{\mathcal{D}} - \lambda_1) \tilde{i}_1 \\ \dots \\ (\lambda_{\mathcal{D}} - \lambda_n) \tilde{i}_n \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Ортогональность токов позволяет записать равенство

$$(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q) = 0.$$

Подстановка в него выражений (4.32) и (4.33), с учетом (4.27), даёт эффективное собственное число. После некоторых промежуточных преобразований можно получить выражение для него в следующем виде

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \tilde{i}_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{i}_i^2}. \quad (4.34)$$

Для того чтобы понять смысл термина "эффективное собственное число" можно представить себе, что матрица M параметрически однородна. Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = L$$

и (4.34) даёт

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \frac{L^2 |\bar{i}|^2}{L |\bar{i}|^2} = L.$$

Это означает, что эффективное собственное число можно определить, как собственное число параметрически однородной матрицы, имеющей для тока \bar{i}

ту же мощность $\lambda_{\varnothing} |\bar{i}|^2$, что и данная матрица M . Очевидно, кроме того, что для параметрически однородной матрицы справедливо $\bar{i} = \bar{i}_d$.

4.6 Структура потоков главной мощности обмотки

Определим структуру продольного и поперечного потоков главной мощности.

Структурные компоненты мощности продольного процесса $\lambda_{\varnothing} |\bar{i}_d|^2$ определяются выражением (4.32)

$$\lambda_{\varnothing} |\bar{i}_d|^2 = \frac{1}{\lambda_{\varnothing}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \tilde{i}_i^2 = \sum_{i=1}^n p_{di} = p. \quad (4.35)$$

Структурные компоненты мощности поперечного процесса $\lambda_{\varnothing} (\bar{i}_q, \bar{i}_d)$ определяются выражениями (4.32), (4.33)

$$\lambda_{\varnothing} (\bar{i}_q, \bar{i}_d) = \frac{1}{\lambda_{\varnothing}} \sum_{i=1}^n (\lambda_{\varnothing} - \lambda_i) \lambda_i \tilde{i}_i^2 = \sum_{i=1}^n p_{qi} = 0. \quad (4.36)$$

Выражения (4.35), (4.36) позволяют сделать следующие выводы.

- Мощности особых токов ($\lambda_i = 0$) исключены из продольного и поперечного процессов.
- Из поперечного процесса исключены мощности токов тех подпространств, для которых $\lambda_i = \lambda_{\varnothing}$.
- Токи, принадлежащие оставшимся подпространствам, имеют мощности и в продольном, и в поперечном процессах. Их вклад в поперечный процесс тем меньше, чем ближе величины λ_i и λ_{\varnothing} .
- При справедливости неравенства $\lambda_i < \lambda_{\varnothing}$ векторное подпространство потребляет элементарный поток мощности поперечного процесса, а при $\lambda_i > \lambda_{\varnothing}$ - генерирует его.

Выражения (4.35), (4.36) детализируют потоки мощности продольного и поперечного процессов. В виде структурной схемы они представлены на рисунке 4.3. На нем в виде сплошных стрелок показаны элементарные потоки мощности d -процесса p_{di} . Пунктирными замкнутыми линиями показаны элементарные потоки мощности q -процесса p_{qi} . Для векторного подпространства с номером i (оно показано в середине рисунка) предполагается справедливость равенства

$$\lambda_i = \lambda_{\varnothing}$$

Тогда, согласно (4.36), $p_{qi} = 0$ и поперечный процесс им не возбуждается.

Как свидетельствует рисунок 4.3, а также выражения (4.30), (4.31) поперечный процесс возбуждается при наличии у токов \bar{i}_d и \bar{i}_q ненулевых канонических координат

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{\varnothing}} \cdot \tilde{i}_i \text{ и } \frac{\lambda_{\varnothing} - \lambda_i}{\lambda_{\varnothing}} \cdot \tilde{i}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

в одном векторном подпространстве. Очевидно, что это может иметь место при следующих условиях $\lambda_i \neq 0$ и $\lambda_i \neq \lambda_{\mathfrak{D}}$.

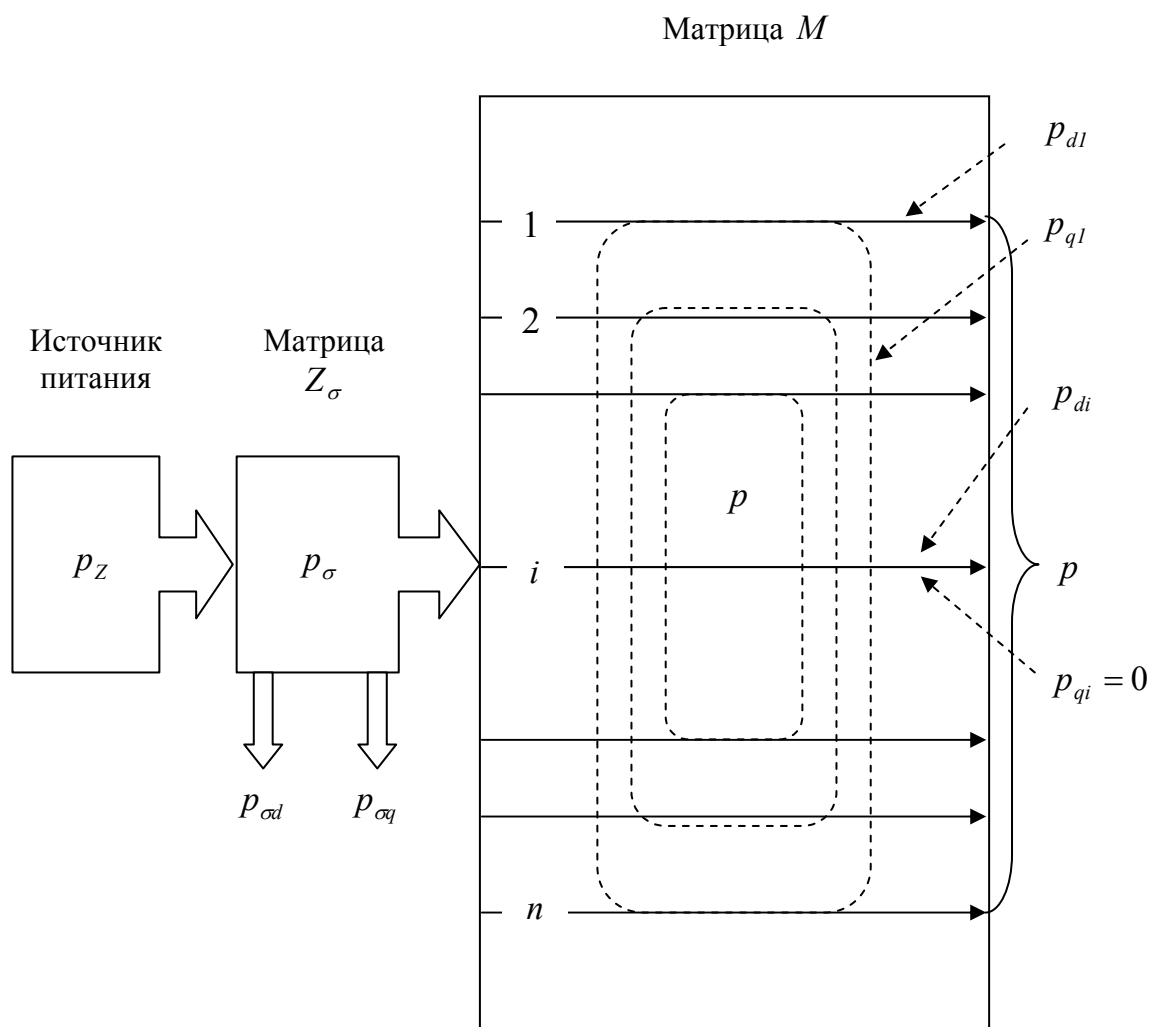


Рисунок 4.3 - Структура энергетических процессов в обмотке

Дадим этим условиям топологическую трактовку. Условие $\lambda_i \neq 0$ указывает на то, что каноническая координата тока \tilde{i}_i не является особым током. Условие $\lambda_i \neq \lambda_{\mathfrak{D}}$ указывает на то, что ток \tilde{i} не расположен в параметрически однородном подпространстве, например, по одной из осей канонического базиса.

Теперь можно сформулировать принципиальные выводы, относящиеся к возможностям влияния источника питания на энергетические процессы в обмотке. Поперечный энергообмен возбуждается любым неособым током, расположенным в параметрически разнородных подпространствах. Воздействия источника питания на положение вектора тока позволяют перевести его в параметрически однородное подпространство. Желательно, чтобы оно имело максимальную величину собственного числа λ_{max} . В этом случае эффективное собственное число будет иметь величину $\lambda_{\mathfrak{D}} = \lambda_{max}$, а ток $\tilde{i} = \tilde{i}_d$ и мощность рассеяния $p_\sigma = p_{сд}$ для данной главной мощности p будут

минимальными. Если же по каким-либо причинам подобное формирование тока нежелательно, то можно расположить ток в нескольких векторных пространствах, с тем, чтобы получить достаточно большое значение λ_3 и приемлемый уровень мощности рассеяния.

Следует подчеркнуть, что рисунок 4.3 иллюстрирует структурные черты энергообмена в матрице M . Аналогичные процессы могут возникнуть в любой параметрически неоднородной матрице ЭМ и, таким образом, в обмотке в целом. В любом случае, через напряжения источника питания можно влиять на уровень избыточного рассеяния обмотки $p_{\sigma q}$.

4.7 Энергетические аспекты канонических преобразований координат

Выше каноническими названы преобразования координат, реализуемые параметрическими матрицами ЭМ. Это означает, что у матрицы любой обмотки ЭМ должно быть два характерных представления: матрица «до преобразования» и матрица «после преобразования». Матрица «до преобразования» составлена из фазных параметров обмотки, матрица «после преобразования» является диагональной и составлена из параметров обмотки по главным осям. Такими параметрами являются собственные числа параметрической матрицы.

Главные оси, задаваемые собственными векторами главной параметрической матрицы, являются внутренней системой координат обмотки. Оси фаз образуют внешнюю систему координат. Сущность канонического преобразования заключается в том, что обмотка формирует поле мощности в соответствии со своими главными - внутренними осями, а источник питает обмотку через внешние - фазные оси. При этом квадратичная форма мощности обмотки имеет для источника неканонический вид, а для обмотки – канонический.

Благодаря каноническому преобразованию, обмотка разделяет поток мощности источника на нормальную (d -процесс) и тангенциальную (q -процесс) компоненты, которые соответственно образуют потребляемую и обменную мощности.

Матрица рассеяния имеет одинаковый диагональный вид «до» и «после» преобразования

$$Z_{\sigma} = \tilde{Z}_{\sigma} = \begin{pmatrix} z_{\sigma 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{\sigma 2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_{\sigma n} \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма мощности рассеяния имеет канонический вид и «до», и «после» преобразования

$$p_{\sigma} = (\bar{i}, Z_{\sigma} \bar{i}) = \sum_{i=1}^n z_{\sigma i} i_i^2.$$

Форма главной мощности имеет канонический вид только «после» преобразования. Согласно (4.27)

$$p = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \tilde{i}_i^2 .$$

Определенность со знаками потоков мощности, при представлении её в канонической форме, отвечает и физической природе энергетических процессов. Физическая мощность может либо потребляться (иметь положительный знак), либо генерироваться (иметь отрицательный знак). Потребляя и генерируя мощности, электрическая машина всегда реализует определенность знаков. Поэтому ей физически присущи формы мощности канонического вида. Другими словами, энергия только поступает в машину по фазным осям, но потребляется она не фазами, а векторными подпространствами обмоток по их каноническим осям.

Характер и интенсивность потребления определяются параметрическими свойствами векторных подпространств, представленными собственными значениями матриц. Применительно к потреблению главной мощности это выглядит так. Мощности источника, отвечающие нулевым собственным значениям, рассеиваются полностью через образование особых токов. Всегда имеется положительное эффективное собственное значение λ_0 по (4.34) такое, что соответствующие ему мощности рассеиваются минимально, а соответствующие ему компоненты тока не возбуждают q -процесс. Прочие компоненты мощности источника рассеиваются обмоткой через q -процесс тем интенсивнее, чем больше отличается их собственное значение от эффективного.

Теория квадратичных форм утверждает, что каноническое преобразование (4.28) является единственным. Это позволяет сформулировать три важных теоретических положения.

- Матрица преобразования координат V , составленная из собственных векторов матрицы M , является единственной матрицей, осуществляющей инвариантное по мощности преобразование координат (4.28).
- Канонический базис задаёт единственный набор осей симметрии поля главной мощности.
- Обмотка с током \bar{i} и взаимными индуктивностями между n фазами может быть единственным образом заменена эквивалентной в смысле главной мощности n -фазной обмоткой без взаимных индуктивностей.

Утверждения о единственности преобразования относятся к общему случаю разных корней характеристического уравнения. Ситуации, возникающие при кратных корнях и имеющие большое прикладное значение, рассматриваются ниже отдельно.

4.8 Связь канонических и классических преобразований координат

Естественно возникает вопрос о том, какова связь канонических преобразований и, известных в электромеханике, классических преобразований

$0\alpha\beta$, $0dq$, $0uv$, а также преобразования симметричных составляющих 012. Ответ на него в краткой форме выглядит так: они являются каноническими преобразованиями для симметричных обмоток, с присущими им кратными корнями характеристического уравнения (см. подпункты 3.3.3.2 и 3.3.3.3). Разумеется, матрицу M любой обмотки преобразованием

$$\tilde{M} = (V^{-1} M V)$$

можно привести к главным осям матрицы симметричной обмотки. Однако такое преобразование будет формальным, так как оно не решит задачу представления мощности через квадраты токов. Параметры обмотки, фигурирующие в матрице \tilde{M} , и соответствующие им мощности не будут иметь физического смысла. Нецелесообразность проведения подобного координатного преобразования не вызывает сомнений.

Рассмотрим вначале возможные координатные преобразования для симметричной трехфазной обмотки, представленной в подпункте 3.3.3.2. Для обозначения её фаз будем использовать символы "С, А, В". В данном случае каноническими векторными подпространствами являются ось $\bar{n}_0 = \bar{v}_1$, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 0$, и плоскость $\alpha\beta$, соответствующая кратному собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$.

Любой вектор тока

$$\bar{i}_{\alpha\beta} = \alpha \bar{v}_2 + \beta \bar{v}_3,$$

сумма координат которого равна нулю, находится в плоскости $\alpha\beta$ и является собственным вектором матрицы M . Любой вектор токов нулевой последовательности вида

$$\bar{i}_0 = \gamma \bar{n}_0,$$

также является собственным вектором матрицы M . Плоскость $\alpha\beta$ перпендикулярна вектору \bar{n}_0 , в силу чего справедливо равенство

$$(\bar{i}_{\alpha\beta}, \bar{i}_0) = 0.$$

Ток обмотки представляет собой сумму ортогональных компонент

$$\bar{i} = \bar{i}_0 + \bar{i}_{\alpha\beta}.$$

В данном случае, согласно подпункту 3.3.3.2, матрица преобразования координат имеет вид

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

и преобразование (4.28) даёт

$$\tilde{i} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \quad (4.37),$$

где

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{1}{3}(i_C + i_A + i_B), \\ i_\alpha &= i_A - i_0, \\ i_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(i_B - i_C). \end{aligned}$$

Таким образом, для симметричной обмотки справедливы равенства

$$\bar{n}_0 = \bar{v}_1, \quad \bar{n}_\alpha = \bar{v}_2, \quad \bar{n}_\beta = \bar{v}_3,$$

свидетельствующие о том, что классическое преобразование координат $0\alpha\beta$ является каноническим.

Преобразование (4.21) раскладывает вектор тока по осям канонического базиса

$$\bar{i} = \sqrt{3}i_0\bar{n}_0 + \sqrt{\frac{3}{2}}i_\alpha\bar{n}_\alpha + \sqrt{\frac{3}{2}}i_\beta\bar{n}_\beta$$

или

$$\bar{i} = \bar{i}_0 + \bar{i}_\alpha + \bar{i}_\beta = \bar{i}_0 + \bar{i}_{\alpha\beta}, \quad (4.38)$$

где $\bar{i}_0 = \sqrt{3}i_0\bar{n}_0$ - составляющая тока по оси 0, $\bar{i}_\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}i_\alpha\bar{n}_\alpha$ - составляющая тока по оси α , $\bar{i}_\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}i_\beta\bar{n}_\beta$ - составляющая тока по оси β , $\bar{i}_{\alpha\beta} = \bar{i}_\alpha + \bar{i}_\beta$ - составляющая тока в плоскости $\alpha\beta$.

Выражение (4.38) представляет вектор тока суммой трёх векторов, принадлежащих трём одномерным каноническим подпространствам. Так как в подпространствах α и β параметрическая матрица однородна, их можно рассматривать как одно двумерное подпространство – плоскость $\alpha\beta$.

Синхронный поворот или вращение векторов \bar{n}_α , \bar{n}_β вокруг вектора \bar{n}_0 происходит в плоскости $\alpha\beta$, поскольку она перпендикулярна \bar{n}_0 . Как уже отмечалось, любой вектор, лежащий в плоскости $\alpha\beta$ является собственным вектором матрицы M . Множество базисов, полученное синхронным поворотом (вращением) векторов \bar{n}_α , \bar{n}_β вокруг вектора \bar{n}_0 , определяет множество канонических преобразований координат, возможное для симметричной обмотки. В их числе находятся и классические преобразования $0dq$ и $0uv$. Они, как и преобразование $0\alpha\beta$, являются каноническими для симметричной обмотки. Так преобразование $0dq$ соответствует вращению осей базиса плоскости $\alpha\beta$ с частотой вращения ротора, а преобразование $0uv$ - с частотой вращения вектора питающих напряжений.

Аналогичные выводы можно сделать и о преобразовании симметричных составляющих 012, в котором составляющая тока $\bar{i}_{\alpha\beta}$ выражается через другие собственные векторы матрицы M . Обычно их обозначают, как \bar{i}_1, \bar{i}_2 и называют векторами токов прямой и обратной последовательности. При этом вектор \bar{n}_α отождествляют с вектором (оператором) $\bar{1} = 1 + 0j$, а вектор \bar{n}_β - с вектором (оператором) $\bar{j} = 0 + 1j$ комплексной плоскости, размещенной на плоскости $\alpha\beta$. После этого записи векторных выражений, относящихся к плоскости $\alpha\beta$, могут быть произведены в базисе $(\bar{1}, \bar{j})$ в форме комплексных выражений. Предположение о тождественности векторов

$$\bar{n}_\alpha = \bar{1}$$

и

$$\bar{n}_\beta = \bar{j},$$

равноценно предположению о независимости базиса плоскости $(\bar{1}, \bar{j})$, то есть о том, что все другие векторы, принадлежащие плоскости, выражены через векторы базиса $(\bar{1}, \bar{j})$. Это, в частности, относится и к тем компонентам ортов фазного базиса $(\bar{n}_C, \bar{n}_A, \bar{n}_B)$, которые принадлежат плоскости $\alpha\beta$:

$$\bar{n}_{C\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\bar{n}_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\bar{n}_{A\alpha\beta} = \bar{n}_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

и

$$\bar{n}_{B\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\bar{n}_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

В предположении независимости базиса $(\bar{1}, \bar{j})$, векторы по (4.39) – (4.41) записываются в нём следующим образом

$$\bar{n}_{C\alpha\beta} = \bar{a}^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad (4.42)$$

$$\bar{n}_{A\alpha\beta} = \bar{1} = 1, \quad (4.43)$$

$$\bar{n}_{B\alpha\beta} = \bar{a} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j. \quad (4.44)$$

Компоненте тока $\bar{i}_{\alpha\beta}$ в независимом базисе соответствует выражение

$$\bar{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} i_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} + \sqrt{\frac{3}{2}} i_{\beta} \bar{n}_{\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} (i_{\alpha} \bar{1} + i_{\beta} \bar{j}). \quad (4.45)$$

Разумеется, это условная независимость, так как компонента \bar{i}_0 по-прежнему определена в базисе фазных осей.

Важно подчеркнуть, что векторы по выражениям (4.39) – (4.41) (или по выражениям (4.42) – (4.44)) принадлежат плоскости $\alpha\beta$ и, следовательно, являются собственными векторами матрицы M симметричной обмотки. Вместе с тем они линейно зависимы и, в отличие от векторов $\bar{1}, \bar{j}$, не образуют базис плоскости.

Отождествление плоскости $\alpha\beta$ с комплексной плоскостью имеет два следствия.

Во-первых, оно позволяет выразить мгновенные токи, принадлежащие плоскости, через соответствующие комплексы

$$i_{\alpha} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2, \quad (4.46)$$

$$i_{\beta} = -j(\bar{i}_1 - \bar{i}_2), \quad (4.47)$$

где

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{2}(i_{\alpha} + j i_{\beta}), \quad \bar{i}_2 = \frac{1}{2}(i_{\alpha} - j i_{\beta}) = \bar{i}_1^*.$$

Во-вторых, оно позволяет рассматривать эти комплексы, как комплексные координаты вектора $\bar{i}_{\alpha\beta}$. Матрица преобразования 012 принадлежит к категории унитарных матриц и имеет вид

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется как сопряженная и транспонированная по отношению к матрице V

$$V^{-1} = \bar{V}^t = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{a}^2 & \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{a} & \bar{1} & \bar{a}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Преобразование симметричных составляющих

$$\tilde{i} = V^{-1} \bar{i} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} i_0 \\ \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

выполненное для вектора тока

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} i_C \\ i_A \\ i_B \end{pmatrix}$$

дает значения координат в виде

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_C + i_A + i_B), \quad (4.50)$$

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{3}(\bar{a}^2 i_C + i_A + \bar{a} i_B) = \ddot{i}_2, \quad (4.51)$$

$$\bar{i}_2 = \frac{1}{3}(\bar{a} i_C + i_A + \bar{a}^2 i_B) = \ddot{i}_1. \quad (4.52)$$

Двоеточие над матрицей в (4.48) и комплексами в (4.46), (4.47), (4.51), (4.52) обозначает операцию комплексного сопряжения.

Вектор $\bar{i}_{\alpha\beta}$ выражается через свои комплексные небазисные координаты следующим образом

$$\bar{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\bar{i}_1 + \ddot{i}_2), \quad (4.53)$$

что подобно его записи через действительные (базисные) координаты по (4.45).

Рисунок 4.4 иллюстрирует выражения (4.42) – (4.53).

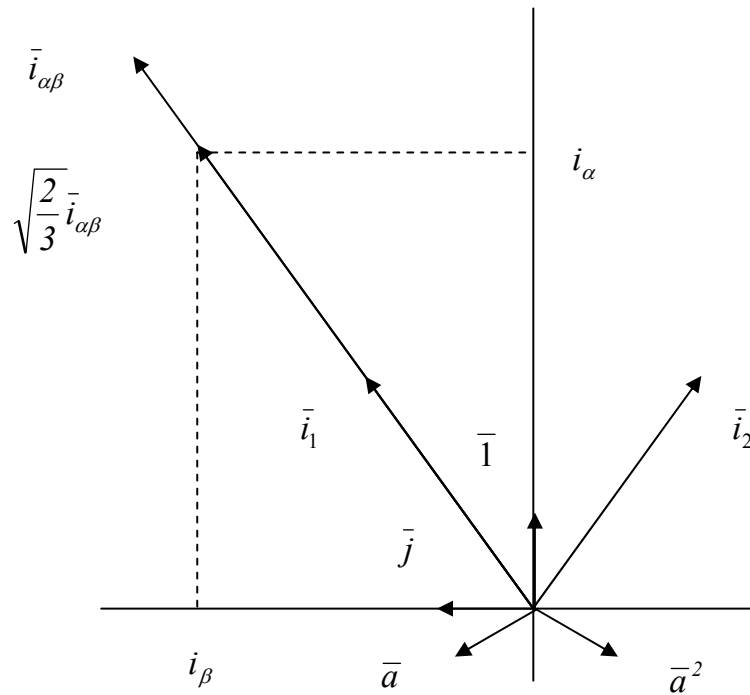


Рисунок 4.4 - Векторы плоскости $\alpha\beta$

Таким образом, преобразованию 012 соответствует гибридный базис, в котором вектор \bar{n}_0 определён в базисе фазных осей, а векторы \bar{i}, \bar{j} считаются независимыми и задающими небазисные векторы по (4.42) – (4.44). Запись вектора тока в гибридном базисе вполне аналогична его записи в базисе $0\alpha\beta$ (см. выражение (4.38))

$$\bar{i} = \sqrt{3} i_0 \bar{n}_0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{i}_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \ddot{i}_2. \quad (4.54)$$

Сравнение выражений (4.38) и (4.54) показывает, что при замене преобразования $0\alpha\beta$ на преобразование 012 векторы $i_\alpha \bar{n}_\alpha, i_\beta \bar{n}_\beta$ заменяются, лежащими в той же плоскости, векторами \bar{i}_1, \bar{i}_2 .

В соответствии с изложенным, преобразование симметричных составляющих представляет собой одну из форм преобразования $0\alpha\beta$, которой, согласно (4.54), соответствуют небазисные комплексные координаты вектора $\bar{i}_{\alpha\beta}$ по (4.51) – (4.52). Для симметричной обмотки преобразование является каноническим. В связи с совпадением, с точностью до комплексного сопряжения, координат вектора (см. выражения (4.51), (4.52)), в евклидовом пространстве преобразование выглядит достаточно формально. Формальность снимается в эрмитовом пространстве, в котором координаты \bar{i}_1, \bar{i}_2 отображают компоненты вектора $\bar{i}_{\alpha\beta}$, вращающиеся в противоположных направлениях, причём, в общем случае, $\bar{i}_1 \neq \bar{i}_2$. Для синусоидальных фазных токов частоты ω_1 выражение (4.54) в эрмитовом пространстве имеет вид

$$\bar{i} = \sqrt{3} \dot{I}_0 \bar{n}_0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{I}_1 e^{j\omega_1 t} + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{I}_2 e^{-j\omega_1 t},$$

где комплексные амплитуды симметричных составляющих даются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{I}_C + \dot{I}_A + \dot{I}_B) \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{3}(\bar{a}^2 \dot{I}_C + \dot{I}_A + \bar{a} \dot{I}_B) \neq \dot{I}_2 \\ \dot{I}_2 &= \frac{1}{3}(\bar{a} \dot{I}_C + \dot{I}_A + \bar{a}^2 \dot{I}_B) \neq \dot{I}_1 \end{aligned}$$

Все приведенные выше соображения относятся и к симметричной обмотке по подпункту 3.3.3.3. Разница состоит лишь в том, что в ней вектору тока \bar{i}_0 соответствует отличная от нуля главная мощность.

Что касается несимметричных обмоток, то для них, как об этом свидетельствуют данные параграфа 3.3, канонические преобразования индивидуальны и, как правило, не совпадают с классическими.

4.9 Матричные аспекты моделирования клеток короткозамкнутых роторов

Клетки короткозамкнутых роторов асинхронных электродвигателей отличаются от классических обмоток тем, что их "фазы" составлены из параметрически разнородных стержней и элементов колец, и, в строгом смысле, фазами не являются. Действительно, токи стержней и элементов колец различаются величинами и фазовыми углами, то есть принадлежат разным фазам.

Обычно, при условии идеальности и симметричности клетки, эквивалентной фазой считается стержень и два прилегающих к нему элемента кольца, сопротивления которых приведены к току стержня.

При моделировании неидеальных (имеющих симметричные повреждения) и несимметричных клеток в качестве фазных токов используются токи элементов колец или контурные токи. Такой подход предполагает, что стержень, его активное и индуктивное сопротивления являются общими для двух соседних фаз. В данном случае токи стержней определяются как разности соседних фазных токов.

Структурные особенности клеток ротора проявляются в структуре их параметрических матриц. В отличие от классических обмоток, короткозамкнутым клеткам ротора соответствуют ленточные матрицы.

Основным инструментом моделирования клеток в настоящее время является гармонический анализ. В этой связи важно проследить связи, существующие между гармоническим анализом и матричной теорией клеток.

4.9.1 Матричная теория и гармонический анализ токов клетки

Гармонический состав МДС несимметричной и неидеальной клетки может быть весьма сложным. Это положение иллюстрируется следующим примером. Пусть клетка имеет z фаз и возбуждается вектором статорных ЭДС \bar{E}_S . Вектор \bar{E}_S представляет собой вектор, заданный в фазном базисе ротора. Фазой ротора считается контур, образованный двумя соседними стержнями и двумя элементами короткозамыкающих колец между стержнями. Ось фазы является ось симметрии контура, а фазным током – контурный ток или, что то же самое, ток в элементах колец. Выражения данного параграфа записаны в эрмитовом векторном пространстве.

Уравнение для определения токов ротора, составленное по методу контурных токов, записывается в матричной форме следующим образом

$$\bar{E}_S = Z_k \cdot \bar{I}_k, \quad (4.55)$$

где Z_k – параметрическая матрица размером $z \times z$, составленная из собственных и взаимных сопротивлений контуров; \bar{I}_k – вектор контурных токов (или токов в короткозамыкающих кольцах), состоящий из z комплексных элементов – фазных токов клетки. Фазные токи определяются выражением

$$\bar{I}_k = Z_k^{-1} \cdot \bar{E}_S = Y_k \cdot \bar{E}_S, \quad (4.56)$$

где $Y_k = Z_k^{-1}$ – матрица собственных и взаимных проводимостей контуров. Пусть

$$Y_k = Y_{kc} + Y_{ka}, \quad (4.57)$$

где Y_{kc} – матрица проводимостей контуров, составленная по усредненным значениям проводимостей фаз. Ей соответствует симметричная клетка с эквивалентной проводимостью фазы z_{zl}^{-1} . Число z_{zl}^{-1} является ненулевым

собственным значением матрицы Y_{kc} . Матрица Y_{ka} определяется отклонениями проводимостей фаз от среднего значения.

Равенство (4.57) разбивает ток по (4.56) на две составляющие. Одна из них

$$\bar{I}_{kc} = Y_{kc} \cdot \bar{E}_S = \frac{1}{z_{zl}} \cdot \bar{E}_S \quad (4.58)$$

соответствует реакции симметричной клетки на возбуждение. При симметричном возбуждении \bar{E}_S ток \bar{I}_{kc} представляет собой симметричную z -фазную систему. Вторая –

$$\bar{I}_{ka} = Y_{ka} \cdot \bar{E}_S \quad (4.59)$$

это асимметризирующий ток, то есть реакция клетки на отклонение проводимостей от средних значений симметричной клетки. У симметричных клеток

$$Y_{ka} = 0 \text{ и } \bar{I}_{ka} = 0.$$

Подстановка (4.56) – (4.58) в (4.59) даёт

$$\bar{I}_{ka} = \left(Z_k^{-1} - \frac{1}{z_{zl}} \cdot E \right) \cdot \bar{E}_S, \quad (4.60)$$

где E – единичная матрица размером $z \times z$ элементов.

Итак, ток в несимметричной клетке есть сумма двух составляющих. Первая из них \bar{I}_{kc} по (4.58) определяется степенью симметрии источника возбуждения, вторая \bar{I}_{ka} по (4.60) – степенью и характером отклонения проводимостей от средних значений. Это могут быть симметричные и асимметричные отклонения. Бесконечному множеству наборов параметров клетки с одними и теми же средними значениями проводимостей соответствует бесконечное множество асимметризирующих токов \bar{I}_{ka} .

В независимом базисе $(\bar{1}, \bar{j})$ плоскости $\alpha\beta$ фазным осям ставится в соответствие множество ортов $(\bar{1}, e^{j1\gamma}, e^{j2\gamma}, \dots, e^{jk\gamma}, \dots, e^{j(z-1)\gamma})$. При отсутствии нулевых компонент координаты векторов фазных величин $\bar{E}_S, \bar{I}_k, \bar{I}_{kc}, \bar{I}_{ka}$ можно рассматривать как дискретные пространственные функции. Каждой координате ставится в соответствие аргумент в виде номера фазы

$$k = 0, 1, 2, \dots, z-1$$

или угол величиной $k\gamma$ геометрических радиан, где $\gamma = \frac{2\pi}{z}$. То же относится и к вектору токов в стержнях клетки

$$\bar{I} = \bar{I}_{k\gamma} - \bar{I}_k, \quad (4.61)$$

где \bar{I} и \bar{I}_k векторы токов стержней и колец в координатах $k = 0, 1, 2, \dots, z-1$; $\bar{I}_{k\gamma}$ – вектор \bar{I}_k , повернутый на угол γ в положительном направлении. Выражение

(4.61) справедливо также для токов $\bar{I}_{kc}, \bar{I}_{ka}$ и дает при их подстановке соответствующие компоненты токов стержней \bar{I}_c, \bar{I}_a , причем справедливо равенство

$$\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_a.$$

Можно утверждать, что появление (изменение) тока \bar{I}_{ka} , связанное с отклонением элементов матрицы Z_k^{-1} от элементов матрицы $z_{21}^{-1} \cdot E$ в (4.60), равноценно появлению (изменению) дискретных пространственных функций токов

$$i_{ka}(k\gamma), i_a(k\gamma).$$

Векторами \bar{I}_{kc}, \bar{I}_c изображаются дискретные пространственные функции

$$i_{kc}(k\gamma), i_c(k\gamma),$$

а вектором \bar{E}_S – функция $e_S(k\gamma)$.

При синусоидальном распределении $e_S(k\gamma)$ функции $i_{kc}(k\gamma), i_c(k\gamma)$ будут синусоидальны. Они являются первыми, а точнее – главными дискретными гармониками токов клетки. Функции $i_{ka}(k\gamma), i_a(k\gamma)$ несинусоидальны, но могут быть разложены в конечный спектр дискретных пространственных гармоник. В частных ситуациях асимметрии фаз клетки периодического характера эти функции могут быть и синусоидальны.

В качестве общего примера на рисунке 4.5 приведены функции мгновенных токов стержней $i(k\gamma), i_c(k\gamma), i_a(k\gamma)$, рассчитанные по (4.58) – (4.61)

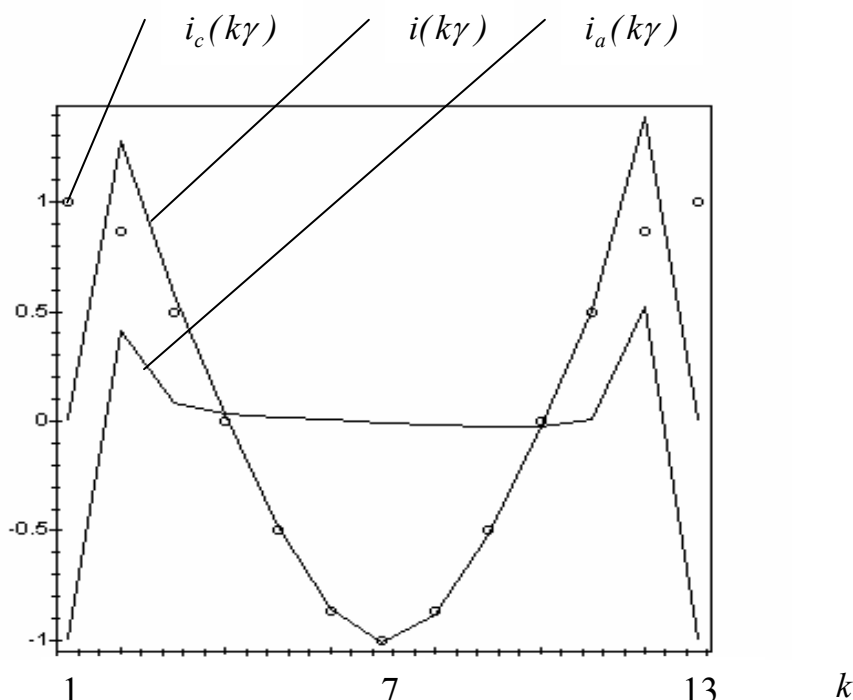


Рисунок 4.5 - Мгновенные токи клетки при обрыве стержня

для клетки с числом фаз $z=12$ при синусоидальном и симметричном двухполюсном возбуждении и обрыве стержня с условным номером 1. Графики приведены для момента времени, когда ток симметричной обмотки имел бы в первом стержне амплитудное значение. Кривые $i(k\gamma), i_a(k\gamma)$ на рисунке 4.5 для наглядности показаны непрерывными. На самом деле это дискретные функции, аналогичные $i_c(k\gamma)$, заданные на множестве из 12 значений аргумента.

Итак, в общем случае, дискретные функции токов колец

$$i_k(k\gamma) = i_{kc}(k\gamma) + i_{ka}(k\gamma)$$

и стержней

$$i(k\gamma) = i_c(k\gamma) + i_a(k\gamma)$$

несинусоидальны и разложимы в конечный спектр пространственных гармоник. Всего таких гармоник не более $z/2$, так как на множестве из z значений аргумента гармоника не может иметь более $z/2$ периодов. Сами гармоники могут быть пульсирующими, эллиптическими, вращающимися в положительном или отрицательном направлении.

Дискретная гармоника токов клетки, имеющая n пар полюсов на множестве

$$k = 0, 1, 2, \dots, z-1$$

называется n -ной эллиптической составляющей тока.

Каждой эллиптической составляющей (ЭС) тока соответствует бесконечный спектр МДС гармоник зубцового порядка. Так функции $i_c(k\gamma)$ на рисунке 4.5 соответствует известный спектр МДС симметричной клетки с номерами гармоник

$$\mu = c \frac{z}{p} \pm 1, \quad c = 0, 1, 2, \dots$$

Учитывая то, что угол γ задается в геометрических радианах, последнее выражение удобнее записать в виде

$$\nu = p\mu = cz \pm p, \quad c = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае главная гармоника имеет номер p , а не 1. Эллиптической составляющей с номером $n \neq p$ соответствует аналогичный спектр МДС с номерами гармоник

$$\nu = cz \pm n, \quad c = 0, 1, 2, \dots \quad (4.62)$$

Это относится и к эллиптическим составляющим тока $i_a(k\gamma)$ на рисунке 4.5. Очевидно, спектр этой функции состоит из нескольких ЭС, а спектр ее МДС из такого же количества бесконечных характерных спектров отдельных ЭС с номерами гармоник по выражению (4.62).

Приведенные выше положения свидетельствуют о том, что спектр МДС неидеальной и асимметричной клетки является сложным и, имея в виду выражение (4.60), разнообразным. Вместе с тем вся информация о нем имеется в $z/2$ эллиптических составляющих токов. В конкретных случаях, если некоторые из ЭС равны нулю, их число может быть меньше $z/2$. Так бесконечному спектру МДС токов симметричной клетки соответствует всего одна ЭС тока. Введение понятия «эллиптическая составляющая» позволяет оперировать информацией о спектре МДС, а при постоянстве магнитных свойств – о спектре поля, обмотки в наиболее компактной форме.

Каждой ЭС можно поставить в соответствие компактный математический объект – изображающий вектор. Его поведение на комплексной плоскости дает информацию о степени эллиптичности гармоник изображаемого им спектра МДС. Это означает, что векторы $\bar{E}_S, \bar{I}_k, \bar{I}_{kc}, \bar{I}_{ka}$ могут быть разложены по эллиптическим составляющим, причем этих компонент будет не более чем $z/2$.

Таким образом, анализ бесконечного спектра МДС обмотки, без потери информации, может быть заменен анализом ограниченного спектра ЭС её токов.

4.9.2 Матричная модель короткозамкнутой клетки ротора

Эта математическая модель для установившегося режима работы задана выражениями

$$\bar{E}_S = Z_k \cdot \bar{I}_k \quad (4.63)$$

и

$$\bar{I} = \bar{I}_{k\gamma} - \bar{I}_k, \quad (4.64)$$

в которых вектор возбуждающих ЭДС \bar{E}_S и матрицу Z_k можно считать известными, а векторы \bar{I}_k и \bar{I} – неизвестными. Решение для них дается выражениями (4.56) и (4.61). Задача данного подраздела пособия состоит в конкретизации матрицы Z_k с тем, чтобы учесть в ней структурные особенности клеток короткозамкнутых роторов асинхронных электродвигателей.

На рисунке 4.6 представлен фрагмент планарной схемы короткозамкнутой z - фазной клетки ротора с параметрической асимметрией произвольного характера. Выделенный на рисунке фрагмент соответствует i -му контуру клетки, причем $i = 0, 1, \dots, N, \quad N = z - 1$.

На рисунке 4.6 показаны:

$z_{i, i+1}, z_{i-1, i}$ – комплексные сопротивления стержней, входящих в i -тый контур, z_{yi} – суммарное сопротивление элементов колец, входящих в i -тый контур, \dot{E}_i –

ЭДС в i -том контуре, включающую в себя ЭДС со стороны статора и ЭДС от всех фазных токов клетки, $\dot{I}_{k0}, \dot{I}_{k1}, \dots, \dot{I}_{kN}$.

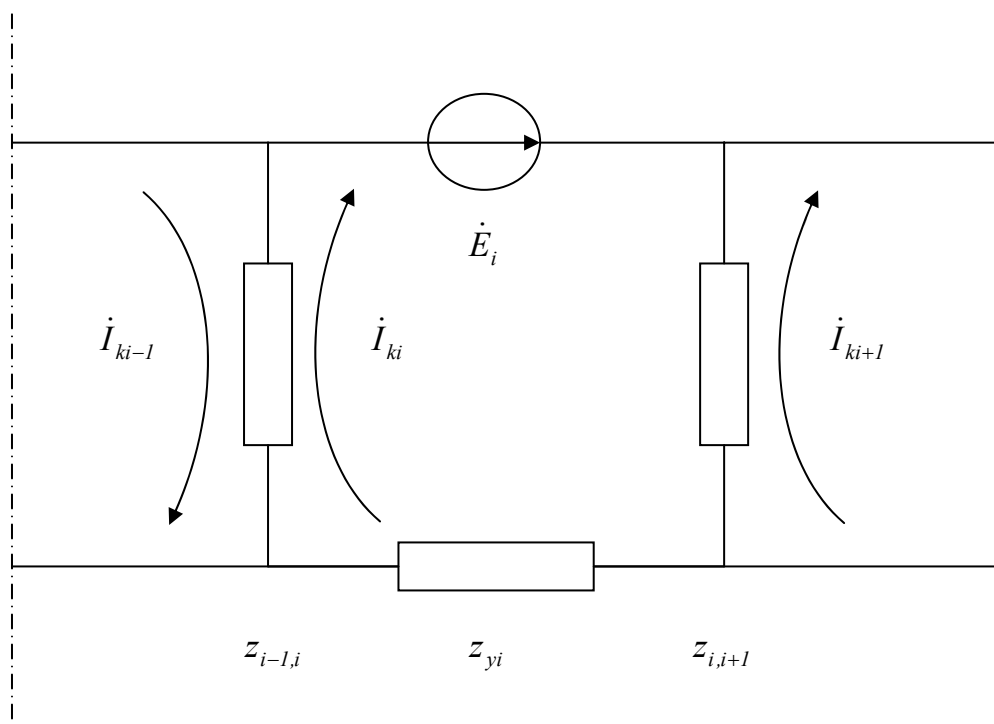


Рисунок 4.6 - Фрагмент планарной схемы короткозамкнутой клетки ротора

Полная схема клетки ротора имеет $z+1$ контур и описывается таким же количеством линейных уравнений баланса напряжений фаз.

Можно сразу записать уравнение для одного из короткозамыкающих колец

$$\sum_{i=0}^N \dot{E}_i = \sum_{i=0}^N z_{yi} \cdot \dot{I}_{ki} = 0. \quad (4.65)$$

Последнее равенство записано на основании того, что суммарные значения потокосцепления и ЭДС клетки от любого поля равны нулю в силу замкнутости магнитных линий. Если элементы колец одинаковы, что характерно для большинства клеток, то

$$z_{y0} = z_{y1} = \dots = z_{yN} = z_y. \quad (4.66)$$

В этом случае из (4.65) следует

$$\sum_{i=0}^N \dot{I}_{ki} = 0. \quad (4.67)$$

Справедливость соотношений (4.65), (4.67) в дальнейшем предполагается. Отметим, что выражения (4.65), (4.67) свидетельствуют об отсутствии нулевых компонент у вектора ЭДС и вектора фазного тока клетки.

Оставшиеся z уравнений составляются по закону контурных токов. В

соответствии с ним запишем для схемы на рисунке 4.6

$$\bar{E}_S = (Z_{k\sigma} + j \cdot X_{km}) \cdot \bar{I}_k, \quad (4.68)$$

где $Z_{k\sigma}$ – матрица сопротивлений рассеяния контуров, X_{km} – матрица сопротивлений само- и взаимной индукции контуров. Обе матрицы имеют размер $z \times z$ элементов. Проанализируем их структуру подробнее.

Матрица $Z_{k\sigma}$ является ленточной симметрической матрицей вида

$$Z_{k\sigma} = \begin{pmatrix} z_{\sigma 0} & -z_{01} & & & & & -z_{N0} \\ -z_{01} & z_{\sigma 1} & -z_{12} & & & & \\ & -z_{12} & z_{\sigma 2} & -z_{23} & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & -z_{N-2,N-1} & z_{\sigma,N-1} & -z_{N-1,N} \\ -z_{N0} & & & & & & -z_{N-1,N} & z_{\sigma N} \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

где $z_{\sigma i} = z_{i-1,i} + z_{i,i+1} + z_y$ – комплексное сопротивление рассеяния i -го контура. Сумма элементов любой строки или столбца матрицы равна z_y . У симметричной клетки

$$z_{\sigma 0} = z_{\sigma 1} = z_{\sigma 2} = \dots = z_{\sigma N} = z_{\sigma} \quad (4.70)$$

и

$$z_{01} = z_{12} = z_{23} = \dots = z_{N0} = z_c. \quad (4.71)$$

Поэтому для нее (4.69) дает

$$Z_{k\sigma} = z_{\sigma 2l} \cdot E, \quad (4.72)$$

где $z_{\sigma 2l} = z_{\sigma} - 2 \cos \gamma \cdot z_c$, E – единичная матрица.

Матрица X_{km} является квадратной симметрической матрицей вида

$$X_{km} = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{10} & x_{20} & \dots & x_{N-2,0} & x_{N-1,0} & x_{N0} \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{N-2,1} & x_{N-1,1} & x_{N1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{N-2,2} & x_{N-1,2} & x_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{0,N-1} & x_{1,N-1} & x_{2,N-1} & \dots & x_{N-2,N-1} & x_{N-1,N-1} & x_{N,N-1} \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{N-2,N} & x_{N-1,N} & x_{NN} \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Собственные индуктивные сопротивления контуров располагаются на главной диагонали, а сопротивления взаимной индукции – вне её. Основным свойством этой матрицы является то, что ей соответствует идеальная симметричная обмотка без рассеяния энергии. Действительно, все контуры рисунка 4.6 геометрически одинаковы и симметрично расположены в пространстве. Кроме того, предполагаются изотропные свойства

магнитопровода машины. Эти допущения позволяет сделать следующие выводы относительно свойств элементов матрицы X_{km} .

- Собственные индуктивные сопротивления контуров одинаковы

$$x_{00} = x_{11} = x_{22} = \dots = x_{NN} = x_M.$$

- Сопротивления взаимной индукции любой пары контуров, расположенных под углом $i\gamma$, где $i = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{z}{2}\right]$, одинаковы

$$x_{mn} = x_i, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad m \neq n.$$

В частности, для соседних контуров они равны x_1 , для контуров, расположенных под углом 2γ – x_2 и так далее.

Эти выводы позволяют представить матрицу (4.73) в следующем виде

$$X_{km} = \begin{pmatrix} x_M & x_1 & x_2 & \dots & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_M & x_1 & \dots & x_4 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_M & \dots & x_5 & x_4 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 & x_M & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_2 & x_1 & x_M \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Необходимо также учесть, что потокосцепление клетки от любого из фазных токов \dot{I}_{ki} , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, равно нулю. Поэтому сумма элементов любого столбца или строки матрицы X_{km} также равна нулю

$$x_M + 2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots) + \frac{1 + (-1)^z}{2} \cdot x_{\left[\frac{z}{2}\right]} = 0.$$

Последнее слагаемое суммы отлично от нуля только для чётных z .

Решения, полученные для магнитного поля контурного тока в пособиях по электромагнитным расчетам электрических машин, свидетельствуют о том, что его распределение в гладком зазоре ЭМ весьма близко к прямоугольному.

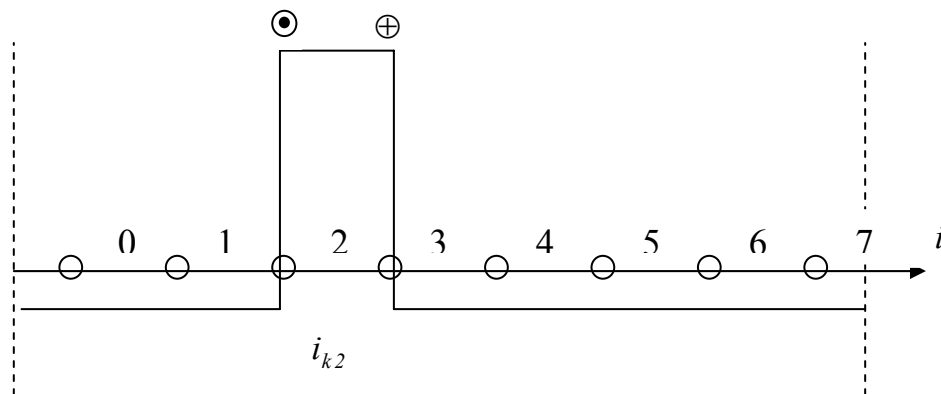


Рисунок 4.7 - Распределение поля контурного тока.

Такое распределение поля напряженности второго контурного тока показано на рисунке 4.7. Принятие данного распределения позволяет утверждать следующее.

- Все сопротивления взаимной индукции в матрице X_{km} по (4.74) одинаковы.
- Из z собственных чисел матрицы X_{km} различаются два. Значению

$$\lambda_0 = 0,$$

кратности $z - 2$, принадлежит множество токов нулевой последовательности. Значению

$$\lambda_1 = \frac{z}{z-1} \cdot x_M,$$

кратности 2, принадлежит множество токов \dot{I}_{ki} , прямой и обратной последовательности.

Так как токи нулевой последовательности исключены равенством (4.67), для любого вектора тока клетки I_k справедливо

$$X_{km} \cdot I_k = x_{z\ell} \cdot E \cdot I_k, \quad (4.75)$$

где $x_{z\ell} = \lambda_1 = \frac{z}{z-1} \cdot x_M$ – главное индуктивное сопротивление клетки. Его можно рассчитать так же, как это делается для симметричных клеток.

Согласно (4.68), (4.69), (4.75) матрицы $Z_{k\sigma}$ и

$$Z_k = Z_{k\sigma} + j \cdot X_{km}$$

отличаются только элементами главной диагонали. В окончательном виде матрица Z_k представляется, как ленточная матрица вида

$$Z_k = \begin{pmatrix} z_0 & -z_{01} & & & & & -z_{N0} \\ -z_{01} & z_1 & -z_{12} & & & & \\ & -z_{12} & z_2 & -z_{23} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & -z_{N-2,N-1} & z_{N-1} & -z_{N-1,N} \\ -z_{N0} & & & & & -z_{N-1,N} & z_N \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

где

$$z_i = z_{\sigma i} + j \cdot x_{z\ell}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

полные комплексные сопротивления контуров.

У симметричной клетки

$$z_0 = z_1 = z_2 = \dots = z_N = z_{\text{конт}} \quad (4.77)$$

и можно записать равенство

$$Z_k \cdot I_k = z_{zl} \cdot E_z \cdot I_k,$$

где $z_{zl} = z_{конт} - 2 \cos \gamma \cdot z_c$ – главное комплексное сопротивление клетки.

Невыполнение равенств (4.71), (4.77) для неидеальных и асимметричных клеток вызывает в них появление асимметризирующих токов.

Математическая модель клетки ротора, заданная выражениями (4.63), (4.64), (4.76) является базой для расчетов токов клетки и анализа эллиптических составляющих их МДС.

Пример моделирования неидеальной несимметричной клетки ротора читатель может найти в приложении А.

4.10 Контрольные вопросы

1. Дайте определение продольному энергетическому процессу.
2. Дайте определение поперечному энергетическому процессу.
3. Каково энергетическое содержание продольного процесса?
4. Каково энергетическое содержание поперечного процесса?
5. Как оценивается и от чего зависит энергетическая эффективность обмотки?
6. Что такое "особые токи"? Когда они появляются в обмотке?
7. Какова мощность особого тока?
8. Каким образом квадратичные формы мощности приводятся к каноническому виду?
9. Каким образом канонический вид квадратичной формы мощности отвечает физическим особенностям энергетических процессов?
10. Что такое "эффективное собственное число"? Каков его энергетический смысл?
11. Каков компонентный состав продольного и поперечного токов?
12. Каковы возможности влияния источника питания на энергетические процессы в обмотке?
13. Каковы энергетические аспекты канонических преобразований координат?
14. Какая связь существует между каноническими и классическими преобразованиями координат?
15. Как связаны матричная теория и гармонический анализ токов клетки короткозамкнутого ротора?
16. Что такое "эллиптическая составляющая токов" клетки короткозамкнутого ротора?
17. Каковы особенности матричной модели клетки короткозамкнутого ротора?

5. МАТРИЦЫ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

5.1 Общие положения

В данном разделе учебного пособия исследуется полная параметрическая матрица Z и математическая модель ЭМ по (1.1) - (1.7). Субматрицы полной матрицы - Z_s, Z_r исследовались в третьем разделе. Особенности параметрических матриц короткозамкнутых клеток ротора представлены в четвертом разделе. Поэтому ниже основное внимание уделено матрицам взаимной индукции M_{rS}, M_{Sr} . Как следует из (1.4), (1.5)

$$M_{rS} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_{aA} & M_{bA} & M_{cA} \\ M_{aB} & M_{bB} & M_{cB} \\ M_{aC} & M_{bC} & M_{cC} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

и

$$M_{Sr} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_{Aa} & M_{Ba} & M_{Ca} \\ M_{Ab} & M_{Bb} & M_{Cb} \\ M_{Ac} & M_{Bc} & M_{Cc} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

В соответствии с принципом взаимности, для взаимных индуктивностей в линейных системах справедливо

$$M_{Gk} = M_{kG}$$

где

$$G \in \{C, A, B\}, \quad k \in \{c, a, b\}.$$

Поэтому матрицы M_{rS}, M_{Sr} являются взаимно транспонированными

$$M_{rS} = M_{Sr}^t, \quad M_{Sr} = M_{rS}^t. \quad (5.3)$$

Выражения (5.3) имеют два следствия.

– Матрица Z является симметрической. Это означает, что она всегда приводима к диагональному виду (к шестифазному эквиваленту) в

шестимерном векторном пространстве $\begin{pmatrix} C \\ A \\ B \\ c \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Решается ли задача приводимости

в пространствах меньшей размерности, в частности, 3 или 2, определяется рангом матрицы Z и ограничениями, накладываемыми схемой на векторы напряжений и токов.

– Параметрические свойства матриц M_{rS}, M_{Sr} и осуществляемые ими преобразования координат совпадают с точностью «до индексов и транспонирования». Это означает, что если произвести перестановку индексов

и транспонирование матриц, то результаты, полученные для матрицы M_{rS} , будут справедливы и для матрицы M_{Sr} . В эрмитовом пространстве необходимо дополнительно произвести операцию комплексного сопряжения. Поэтому достаточно изучить свойства одной из матриц взаимной индукции, например, матрицы M_{rS} .

5.2 Матрица взаимной индукции

Изучение свойств матрицы M_{rS} по (5.1) проведем при некоторых, характерных для электрических машин, допущениях.

Предполагается, что суммы элементов любой строки и любого столбца M_{rS} равны нулю. Физически это означает, что суммарная ЭДС ротора в любой фазе статора равна нулю и что ЭДС от любого фазного тока ротора в обмотке статора равна нулю. Справедливость этих предположений обеспечивается замкнутостью главного магнитного поля ротора.

Предполагается симметричное расположение осей фаз статора и ротора, что позволяет записать

$$M_{bA} = M_{cB} = M_{aC}$$

и

$$M_{aB} = M_{bC} = M_{cA}.$$

Предполагается, что при совпадении осей любой фазы статора и любой фазы ротора, то есть при $\theta \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$, взаимные индуктивности между ними равны M_{max} . В частности, при $\theta = 0$ справедливы равенства

$$M_{aA}(0) = M_{bB}(0) = M_{cC}(0) = M_{max}.$$

При любом угле θ справедливы равенства

$$M_{aA} = M_{bB} = M_{cC} = M(\theta).$$

После этого, согласно (5.1), матрица приобретает вид

$$M_{rS} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_{aA} & M_{bA} & M_{cA} \\ M_{cA} & M_{aA} & M_{bA} \\ M_{bA} & M_{cA} & M_{aA} \end{pmatrix} = M_{max} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_{aA} & m_{bA} & m_{cA} \\ m_{cA} & m_{aA} & m_{bA} \\ m_{bA} & m_{cA} & m_{aA} \end{pmatrix},$$

где символами m_{kA} показаны соответствующие индуктивности, выраженные в долях от M_{max} .

Запись позволяет классифицировать матрицу взаимной индукции, как несимметрическую матрицу. Кроме того, справедливы равенства

$$M_{aA} + M_{bA} + M_{cA} = 0 \text{ и } m_{aA} + m_{bA} + m_{cA} = 0.$$

При данных допущениях каноническим преобразованием для матрицы M_{rS} будет преобразование симметричных составляющих. Согласно выражению (4.48) преобразование 012 даёт матрицу

$$\tilde{M}_{rS} = V^{-1}M_{rS}V = \frac{3}{2}M_{max} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{aA} - j \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & m_{aA} + j \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Матрица имеет одно нулевое и два комплексно сопряженных собственных числа, имеющие смысл операторных сопротивлений токам нулевой, прямой и обратной последовательности

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}M_{max} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ m_{aA} - j \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} \\ m_{aA} + j \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Собственными векторами матрицы M_{rS} , отвечающими собственным числам являются столбцы матрицы V

$$\bar{v}_0 = \bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{1} \\ \bar{a}^2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \bar{a}^2 \\ \bar{1} \\ \bar{a} \end{pmatrix}$$

Действительно, нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств

$$M_{rS}\bar{v}_0 = \lambda_0 \bar{v}_0, \quad (5.5)$$

$$M_{rS}\bar{v}_1 = \dot{\lambda}_1 \bar{v}_1, \quad (5.6)$$

$$M_{rS}\bar{v}_2 = \dot{\lambda}_2 \bar{v}_2, \quad (5.7)$$

причем справедливы соотношения $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2$ и $\bar{v}_1 = \ddot{v}_2$ (как и ранее, двоеточие обозначает операцию комплексного сопряжения для $\dot{\lambda}_2$ и \bar{v}_2).

Равенства (5.4) – (5.7) свидетельствуют о следующем.

- Матрица M_{rS} не является симметрической, поэтому её собственные числа и собственные векторы, относящиеся к токам прямой и обратной последовательности, комплексно сопряжены.
- Векторы $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ являются собственными векторами матрицы M_{rS} , соответствующими собственным значениям $\lambda_0, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2$.

- Собственные значения имеют смысл взаимных операторных сопротивлений ротора и статора для токов нулевой, прямой и обратной последовательности.
- Равенство $\lambda_0 = 0$, свидетельствует о том, что токи ротора нулевой последовательности в статор не трансформируются.
- Равенство $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2$, свидетельствует о том, что взаимная индуктивность ротора и статора для токов прямой и обратной последовательности одинакова по модулю, но приведение токов ротора в систему координат статора для компонент прямой и обратной последовательности происходит по разным правилам.
- В силу равенства $\lambda_0 = 0$ взаимодействие ротора и статора, электрическое и электромеханическое, целиком осуществляется в плоскости $\alpha\beta$, которой принадлежат собственные векторы \bar{v}_1, \bar{v}_2 . Поэтому преобразование векторов токов статора и ротора в эту плоскость является обязательным элементом электромеханического преобразования энергии.

В частном случае, когда матрица M_{rs} учитывает только первые гармоники полей фаз (случай моногармонического поля взаимной индукции), она имеет вид

$$M_{rs} = M_{max} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta \end{pmatrix}$$

и выражение (5.4) дает

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} M_{max} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} \end{pmatrix}$$

Таким образом, приведение изображающего вектора тока к системе координат статора осуществляется умножением его компоненты нулевой последовательности на 0, компоненты прямой последовательности на множитель $e^{j\theta}$, компоненты обратной последовательности на множитель $e^{-j\theta}$.

5.3 Квадратичная форма электромагнитной мощности статора

Электромагнитная мощность обмотки статора дается выражением

$$p_{\text{ЭМС}} = (\bar{i}_s, M_{rs} \bar{i}_r). \quad (5.8)$$

Представим токи статора и ротора в виде разложений на симметричные составляющие. По существу, это разложение токов по осям $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2$. Умножая (4.49) на матрицу V , получим

$$\bar{i}_s = \sqrt{3} (i_{s0} \bar{n}_0 + \bar{i}_{s1} \bar{v}_1 + \bar{i}_{s2} \bar{v}_2), \quad (5.9)$$

$$\bar{i}_r = \sqrt{3}(i_{r0}\bar{n}_0 + \bar{i}_{r1}\bar{v}_1 + \bar{i}_{r2}\bar{v}_2), \quad (5.10)$$

где симметричные составляющие токов статора даются выражениями (4.50) – (4.52). Аналогичные выражения справедливы и для симметричных составляющих тока ротора.

Найдем вектор ЭДС ротора в обмотке статора по (5.10) и (5.5) – (5.7). Учитывая равенство $\lambda_0 = 0$, получаем

$$M_{rs}\bar{i}_r = \sqrt{3}(M_{rs}\bar{v}_0\bar{i}_{r0} + M_{rs}\bar{v}_1\bar{i}_{r1} + M_{rs}\bar{v}_2\bar{i}_{r2}) = \sqrt{3}(\dot{\lambda}_1\bar{i}_{r1}\bar{v}_1 + \dot{\lambda}_2\bar{i}_{r2}\bar{v}_2). \quad (5.11)$$

Далее, учитывая тот факт, что среди различных скалярных произведений векторов $\bar{v}_0 = \bar{n}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ только произведение

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 1$$

отлично от нуля, скалярно умножаем выражение (5.11) на ток статора по (5.9). После этого выражение приобретает вид

$$p_{\text{ЭМС}} = (\bar{i}_s, M_{rs}\bar{i}_r) = 3\left((\bar{i}_{s2}, \dot{\lambda}_1\bar{i}_{r1}) + (\bar{i}_{s1}, \dot{\lambda}_2\bar{i}_{r2})\right). \quad (5.12)$$

В частном случае моногармонического поля, справедливо выражение

$$p_{\text{ЭМС}} = (\bar{i}_s, M_{rs}\bar{i}_r) = 3\left(\frac{3}{2}M_{\text{max}}\right)\left((\bar{i}_{s2}, \frac{d}{dt}\bar{i}_{r1}e^{j\theta}) + (\bar{i}_{s1}, \frac{d}{dt}\bar{i}_{r2}e^{-j\theta})\right). \quad (5.13)$$

Таким образом, электромагнитная мощность реализуется через компоненты токов, принадлежащих плоскости $\alpha\beta$. Для выражений (5.12), (5.13) это токи прямой и обратной последовательности. Пользуясь тем, что векторы $\bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta$ являются базисом плоскости, получим аналогичные выражения для $p_{\text{ЭМС}}$ в базисе $(\bar{n}_0, \bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta)$. Инвариантность преобразования (см. пункт 1.1.5) позволяет записать

$$p_{\text{ЭМС}} = (\bar{i}_s, M_{rs}\bar{i}_r) = (\tilde{i}_s, \tilde{M}_{rs}\tilde{i}_r). \quad (5.14)$$

Определим для тока ротора дополнительный базис $(\bar{n}_0, \bar{n}_d, \bar{n}_q)$, полученный поворотом векторов $\bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta$ вокруг вектора \bar{n}_0 на угол θ . Согласно (4.28), (4.37), в базисе $(\bar{n}_0, \bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta)$ для тока статора и базисе $(\bar{n}_0, \bar{n}_d, \bar{n}_q)$ для тока ротора справедливы выражения

$$\tilde{M}_{rs} = V^{-1}M_{rs}V = \left(\frac{3}{2}M_{\text{max}}\right)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{aA} & \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} & m_{aA} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\tilde{i}_s = V^{-1}\bar{i}_s = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i_{s0} \\ i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{i}_r = V^{-1}\bar{i}_r = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i_{r0} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Подстановка (5.15) – (5.17) в (5.14) дает выражение

$$p_{\text{ЭМС}} = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} M_{\text{max}} \right) \left(i_{S\alpha} \frac{di_{r\alpha}}{dt} + i_{S\beta} \frac{di_{r\beta}}{dt} \right), \quad (5.18)$$

где обозначено

$$i_{r\alpha} = m_{aA} i_{rd} + \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} i_{rq}, \quad (5.19)$$

$$i_{r\beta} = m_{aA} i_{rq} - \frac{m_{bA} - m_{cA}}{\sqrt{3}} i_{rd}. \quad (5.20)$$

Вектор тока ротора записывается в базисе $(\bar{n}_0, \bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta)$ как

$$\tilde{i}_{rS} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} i_{r0} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

В частном случае моногармонического поля взаимной индукции, для $i_{r\alpha}$, $i_{r\beta}$ справедливы выражения

$$i_{r\alpha} = \cos(\theta) i_{rd} - \sin(\theta) i_{rq}, \quad (5.22)$$

$$i_{r\beta} = \cos(\theta) i_{rq} + \sin(\theta) i_{rd}. \quad (5.23)$$

Отметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

осуществляющая, согласно (5.22), (5.23), преобразование вектора

$$\tilde{i}_{rdq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix}$$

в вектор

$$\tilde{i}_{r\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix},$$

является ортогональной матрицей.

Итак, преобразования 012 и $0\alpha\beta$ в общем случае не являются каноническими для матрицы M_{rS} . Вместе с тем, преобразование 012 приводит её к диагональному виду (5.4), а преобразование $0\alpha\beta$ - к кососимметрическому виду (5.15). Нулевые элементы первой строки и первого столбца матриц по (5.4) и (5.15) свидетельствуют о взаимной независимости подпространств $\alpha \bar{n}_0$ и $\beta \bar{n}_\alpha + \gamma \bar{n}_\beta$ (α, β, γ - любые действительные числа) в матрице M_{rS} .

5.4 Квадратичная форма механической мощности

Квадратичная форма механической мощности выделяется из $p_{\text{ЭМС}}$ по (5.18) взятием производной в виде

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \omega \frac{d}{d\theta}.$$

Выполнив эту операцию в (5.18), при справедливости (5.22), (5.23), получаем

$$P_{\text{мех}} = \omega \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} M_{\text{max}} \right) (i_{S\beta} i_{r\alpha} - i_{S\alpha} i_{r\beta}). \quad (5.24)$$

Принимая во внимание вырожденность параметрической матрицы M_{rs} по оси \bar{n}_0 , можно утверждать, что преобразование $0\alpha\beta$ является условно каноническим (при справедливости условий (5.22), (5.23)) для механической мощности. При этом в качестве обобщенного тока выступает вектор, координатами которого являются средние геометрические значения токов

$$\bar{i}_{o\bar{o}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2i_{S0}i_{r0}} \\ \sqrt{i_{S\beta}i_{r\alpha}} \\ \sqrt{-i_{S\alpha}i_{r\beta}} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Поверхность неизменной механической мощности

$$P_{\text{мех}} = \text{const}$$

в зависимости от знаков и величин произведений токов представляет собой гиперболический, эллиптический или круговой цилиндр с полуосью по направлению \bar{n}_α величиной

$$\sqrt{\frac{P_{\text{мех}}}{\omega \frac{3}{2} M_{\text{max}}}},$$

вырожденный в направлении вектора \bar{n}_0 .

Напомним читателю о том, что равенства (5.22), (5.23) справедливы для симметричных неявнополюсных ЭМ, для которых высшие гармоники поля взаимной индукции отнесены к дифференциальному рассеянию и учтены в матрицах рассеяния статора и ротора.

5.5 Параметрическая матрица электрической машины

Кососимметричность $\tilde{M}_{rs} = M_{rS\alpha\beta}$ и аналогичной матрицы ротора $\tilde{M}_{sr} = M_{srdq}$ приводит к тому, что полная матрица машины Z в трехмерном пространстве, в отличие от шестимерного, не является симметрической, а, следовательно, является приводимой только в частных случаях. Ниже рассматриваются такие частные случаи применительно к основным типам ЭМ. При этом предполагается установившийся режим работы и синусоидальность фазных токов, имеющих частоту, равную одной относительной единице. Выражения записаны в эрмитовом векторном пространстве. Используется общепринятая комплексная форма записи для электромагнитных величин и параметров ЭМ.

В наиболее общем случае несимметричной трёхфазной ЭМ матрица Z имеет следующую структуру (здесь и далее для элементов Z используются обозначения, принятые в [1])

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & X_f & X_r \\ X_r & Z_2 & X_f \\ X_f & X_r & Z_3 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Здесь $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ собственные комплексные сопротивления эквивалентных фаз ЭМ; X_f, X_r сопротивления взаимной индукции эквивалентных фаз.

У симметричной машины $Z_1 = Z_2 = Z_3 = z$ и матрица Z приобретает вид

$$Z = \begin{pmatrix} z & X_f & X_r \\ X_r & z & X_f \\ X_f & X_r & z \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

У вращающихся машин $X_r \neq X_f$, что связано с кососимметричным типом матриц $M_{rS\alpha\beta}$ и M_{srdq} . У симметричных ЭМ с заторможенным ротором, фазорегуляторов, трансформаторов (далее – статических устройств) координатные оси статора и ротора взаимно неподвижны. Для них с точностью до постоянной, можно положить $\theta = 0$. При этом условии матрицы $M_{rS\alpha\beta}$ и M_{srdq} становятся симметрическими, $X_f = X_r = x$, а параметрическая матрица Z является матрицей тёплицевого типа

$$Z = \begin{pmatrix} z & x & x \\ x & z & x \\ x & x & z \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Приведем анализ свойств матриц (5.26), (5.27) и (5.28). Для этого выполним преобразование координат $SAB \Rightarrow 0\alpha\beta$.

5.5.1 Преобразование параметрической матрицы несимметричной машины к координатам $0\alpha\beta$

Преобразование проводится по известному правилу

$$\tilde{Z} = V^{-1} Z V, \quad (5.29)$$

где

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

и

$$V^{-1} = V^t = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

матрицы преобразования.

Подстановка (5.26), (5.30), (5.31) в (5.29) дает параметрическую матрицу ЭМ в базисе $(\bar{n}_0, \bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta)$

$$\tilde{Z} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

где

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{Z_1 + X_f + X_r}{2} + \frac{X_r + Z_2 + X_f}{2} + \frac{X_f + X_r + Z_3}{2}, \\ z_{12} &= \frac{2Z_1 - X_f - X_r}{2\sqrt{2}} + \frac{2X_r - Z_2 - X_f}{2\sqrt{2}} + \frac{2X_f - X_r - Z_3}{2\sqrt{2}}, \\ z_{13} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{Z_2 - Z_3}{2}, \\ z_{21} &= \frac{Z_1 + X_f + X_r}{\sqrt{2}} - \frac{X_r + Z_2 + X_f}{2\sqrt{2}} - \frac{X_f + X_r + Z_3}{2\sqrt{2}}, \\ z_{22} &= \frac{2Z_1 - X_f - X_r}{2} - \frac{2X_r - Z_2 - X_f}{4} - \frac{2X_f - X_r - Z_3}{4}, \\ z_{23} &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(X_f - X_r - \frac{Z_2 - Z_3}{3} \right) \\ z_{31} &= \sqrt{3} \frac{X_r + Z_2 + X_f}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3} \frac{X_f + X_r + Z_3}{2\sqrt{2}}, \\ z_{32} &= \sqrt{3} \frac{2X_r - Z_2 - X_f}{4} - \sqrt{3} \frac{2X_f - X_r - Z_3}{4}, \\ z_{33} &= \frac{3}{2} \left(\frac{Z_2 + Z_3}{2} - \frac{X_f + X_r}{2} \right) \end{aligned}$$

Итак, согласно (5.32), координатное преобразование $SAB \Rightarrow 0\alpha\beta$ в общем случае не делает матрицу машины диагональной, а векторные подпространства 0 и $\alpha\beta$ взаимно независимыми. Не решается не только задача приводимости, но и задача разделения модели на независимые блоки. Этот результат вполне ожидаем, так как рассчитывать на то, что данное координатное преобразование «случайно» окажется каноническим, хотя бы для части пространства параметрической матрицы, не было никаких оснований.

5.5.2 Параметрическая матрица симметричной машины

В этом случае в матрице \tilde{Z} по (5.32) следует положить равными собственные сопротивления эквивалентных фаз $Z_1 = Z_2 = Z_3 = z$. Тогда она принимает вид

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} z + X_f + X_r & 0 & 0 \\ 0 & z - \frac{X_f + X_r}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}(X_f - X_r) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}(X_f - X_r) & z - \frac{X_f + X_r}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

В отличие от несимметричной машины, в симметричной ЭМ векторные подпространства 0 и $\alpha\beta$ независимы (на это указывают нули первой строки и первого столбца матрицы). Уравнение

$$\tilde{U} = \tilde{Z} \cdot \tilde{I},$$

записанное в трехмерном пространстве, заменяется парой независимых уравнений, записанных в отдельных подпространствах: уравнением

$$\dot{U}_0 = z_0 \cdot \dot{I}_0, \quad (5.34)$$

где

$$z_0 = z + X_f + X_r$$

сопротивление токам нулевой последовательности; и уравнением

$$U_{\alpha\beta} = Z_{\alpha\beta} \cdot I_{\alpha\beta}, \quad (5.34)$$

где

$$U_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \dot{U}_\alpha \\ \dot{U}_\beta \end{pmatrix}, \quad I_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \dot{I}_\alpha \\ \dot{I}_\beta \end{pmatrix}, \quad Z_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} z - \frac{X_f + X_r}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}(X_f - X_r) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(X_f - X_r) & z - \frac{X_f + X_r}{2} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (5.34) записано по оси вектора \bar{n}_0 , а уравнение (5.34) - в плоскости $\alpha\beta$ векторного пространства.

5.5.3 Параметрические матрицы статических устройств

Для параметров статических (не вращающихся) устройств следует положить

$$X_f = X_r = x.$$

При этом матрица несимметричного устройства сохраняет вид (5.32). Для симметричного устройства она приобретает вид диагональной матрицы

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} z + 2x & 0 & 0 \\ 0 & z - x & 0 \\ 0 & 0 & z - x \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Это означает, что для симметричных статических устройств преобразование $SAB \Rightarrow 0\alpha\beta$ является каноническим, что решает задачу приводимости. При этом становятся взаимно независимыми все три векторных подпространства $0, \alpha$ и β . Это позволяет моделировать такое устройство по трем независимым уравнениям

$$\dot{U}_0 = z_0 \cdot \dot{I}_0, \quad (5.36)$$

$$\dot{U}_\alpha = z_\alpha \cdot \dot{I}_\alpha, \quad (5.37)$$

$$\dot{U}_\beta = z_\beta \cdot \dot{I}_\beta, \quad (5.38)$$

где $z_0 = z + 2x$, $z_\alpha = z_\beta = z - x$ - параметры подпространств.

5.6 Параметрическая анизотропия векторного пространства электрической машины

Структура матрицы \tilde{Z} по (5.32) свидетельствует о том, векторное пространство обладает различными сопротивлениями по осям $0, \alpha$ и β . То же можно сказать и о матрице симметричной машины по (5.33). Разница состоит лишь в том, что у несимметричной машины векторные подпространства взаимно зависимы, а у симметричной – взаимно независимы. В этом смысле векторное пространство ЭМ является параметрически анизотропным.

У симметричной машины анизотропным является также подпространство $\alpha\beta$. Так для токов нулевой и прямой последовательности

$$\dot{I}_0, \quad \dot{I}_\alpha = j \dot{I}_\beta$$

параметрическая матрица (5.33) имеет вид

$$\tilde{Z} = Z_{01} = \begin{pmatrix} z + X_f + X_r & 0 & 0 \\ 0 & z - \frac{1}{2}(X_f + X_r) - j \frac{\sqrt{3}(X_f - X_r)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & z - \frac{1}{2}(X_f + X_r) - j \frac{\sqrt{3}(X_f - X_r)}{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому сопротивлением подпространства $\alpha\beta$ токам прямой последовательности является комплекс

$$z_1 = z - \frac{1}{2}(X_f + X_r) - j \frac{\sqrt{3}}{2}(X_f - X_r).$$

Для токов нулевой и обратной последовательности

$$\dot{I}_0, \quad \dot{I}_\alpha = -j \dot{I}_\beta,$$

параметрическая матрица (5.33) имеет вид

$$\tilde{Z} = Z_{02} = \begin{pmatrix} z + X_f + X_r & 0 & 0 \\ 0 & z - \frac{1}{2}(X_f + X_r) + j \frac{\sqrt{3}(X_f - X_r)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & z - \frac{1}{2}(X_f + X_r) + j \frac{\sqrt{3}(X_f - X_r)}{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому сопротивлением подпространства $\alpha\beta$ токам обратной последовательности является комплекс

$$z_2 = z - \frac{1}{2}(X_f + X_r) + j \frac{\sqrt{3}}{2} (X_f - X_r) \neq z_1.$$

Различие между сопротивлениями z_1 и z_2 обусловлено вращением ротора. Для статических устройств, как уже указывалось, справедливо равенство $X_f = X_r = x$, поэтому

$$z_1 = z_2 = z_\alpha = z_\beta = z - x,$$

а матрица $\tilde{Z} = Z_{01} = Z_{02} = Z_{012}$ приобретает вид (5.35) для любых систем токов.

Плоскость $\alpha\beta$ у статических устройств параметрически изотропна. Это дает возможность из двух уравнений (5.37), (5.38) исключить любое. Иначе говоря, симметричные статические устройства двумерны, а при отсутствии составляющих нулевой последовательности – одномерны.

5.7 Концепция рационального питания электрической машины

5.7.1 Критерий рационального питания

Критерием рационального питания ЭМ может служить отношение мощностей рассеяния и механической

$$K_r = \frac{p_\sigma}{p_{\text{мех}}} = \frac{(\bar{i}_s, Z_{\sigma s} \bar{i}_s) + (\bar{i}_r, Z_{\sigma r} \bar{i}_r)}{\omega(\bar{i}_s, \frac{\partial(dtM_{rs})}{\partial\theta} \bar{i}_r)} \rightarrow \min. \quad (5.39)$$

Вектор питающего напряжения

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_r \end{pmatrix},$$

фигурирующий в модели (1.1) и удовлетворяющий критерию (5.39), будем называть вектором рационального питания ЭМ.

Придадим (5.39) удобную для анализа форму. После простых преобразований получаем следующую запись

$$K_r = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_{\sigma Si} i_{Si}^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_{\sigma ri} i_{ri}^2}{\omega(\bar{i}_s, \frac{\partial(dtM_{rs})}{\partial\theta} \bar{i}_r)}, \quad (5.40)$$

где $\lambda_{\sigma Si}$, $\lambda_{\sigma ri}$, i_{Si} , i_{ri} - значения собственных чисел и координат векторов тока статора и ротора.

Выражение (5.40) свидетельствует о том, что, при прочих равных условиях, минимальное значение критерия $K_{r \min}$ имеет место при расположении токов в тех векторных пространствах (фазах), которым соответствуют относительно небольшие значения параметров рассеяния

$\lambda_{\sigma Si}, \lambda_{\sigma ri}$. Предполагается, что управлять положением векторов тока в пространстве можно при помощи вектора питающих напряжений.

В качестве абсолютного минимума критерия используется значение $K_r = K_{r \min}$, соответствующее ЭМ с моногармоническим полем взаимной индукции (см. выражения (5.22), (5.23)), с однородными матрицами рассеяния

$$\lambda_{\sigma S1} = \lambda_{\sigma S2} = \dots = \lambda_{\sigma Sn} = z_{\sigma S}, \quad \lambda_{\sigma r1} = \lambda_{\sigma r2} = \dots = \lambda_{\sigma rn} = z_{\sigma r}, \quad (5.41)$$

без токов нулевой последовательности в обмотках статора и ротора

$$i_{S0} = 0, \quad i_{r0} = 0. \quad (5.42)$$

В этих условиях токи \bar{i}_S, \bar{i}_r принадлежат плоскости $\alpha\beta$, а умножение роторного тока на матрицу $\frac{\partial(dtM_{rS})}{\partial\theta}$ выполняет операцию преобразования базисов плоскости $dq \rightarrow \alpha\beta$. При справедливости (5.22), (5.23), (5.41), (5.42) выражение (5.40) даёт

$$K_{r \min} = \frac{z_{\sigma S}^* + k_i^2 z_{\sigma r}^*}{k_i \sin(\varphi_{rS})}, \quad (5.43)$$

где $z_{\sigma S}^*, z_{\sigma r}^*$ - параметры рассеяния, выраженные в долях от $\omega \frac{3}{2} M_{\max}$, $k_i = \frac{|\bar{i}_r|}{|\bar{i}_S|}$,

φ_{rS} угол между векторами $\tilde{i}_S, \tilde{i}_{rS}$ в плоскости $\alpha\beta$. В соответствии с выражениями (5.16), (5.21) этот угол равен

$$\varphi_{rS} = \arccos \frac{i_{S\alpha} i_{r\alpha} + i_{S\beta} i_{r\beta}}{\sqrt{(i_{S\alpha}^2 + i_{S\beta}^2)(i_{r\alpha}^2 + i_{r\beta}^2)}}. \quad (5.44)$$

Отметим тот факт, что минимум критерия по (5.43) зависит только от взаимного расположения токов $\tilde{i}_S, \tilde{i}_{rS}$ и, в отличие от текущего значения K_r по (5.40), не зависит от того в каких подпространствах эти токи физически реализованы. Это является следствием того, что в подпространстве $\gamma \bar{n}_0$ токи, согласно (5.42), отсутствуют, а подпространство $\alpha \bar{n}_\alpha + \beta \bar{n}_\beta$, согласно (5.41), параметрически однородно для токов статора и ротора.

5.7.2 Возможности осуществления рационального питания

Поиск минимального значения критерия K_r по (5.39) представляет собой поиск минимума скалярной функции векторного аргумента \bar{u}

$$K_r = K_r(\bar{u}) = \frac{p_\sigma(\bar{i}_S(\bar{u}), \bar{i}_r(\bar{u}))}{p_{\max}(\bar{i}_S(\bar{u}), \bar{i}_r(\bar{u}))}. \quad (5.45)$$

При этом следует иметь в виду два обстоятельства.

1. Реализуемые значения аргумента ограничены условиями, накладываемыми на фазные напряжения и токи схемами соединения фаз статора и ротора. Как

уже отмечалось (см. параграф 1.4) эти условия приводят к линейной зависимости фаз и поперечному энергообмену. Допустимые отклонения от номинальных значений, требования, предъявляемые к характеристикам ЭМ, также могут рассматриваться как ограничения аргумента.

2. Согласно выражениям (1.1), (1.8) ток ЭМ реализуется как единый вектор

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{pmatrix} = Z^{-1}\bar{u}. \text{ Организация раздельного влияния на токи } \bar{i}_s, \bar{i}_r, \text{ в тех случаях,}$$

когда она возможна, накладывает дополнительные ограничения на аргумент.

Таким образом, задачу поиска минимума функции $K_r(\bar{u})$ можно классифицировать как задачу нелинейного программирования при наличии ограничений.

Положение и значение абсолютного минимума определено выражениями (5.22), (5.23), (5.41) – (5.44). Абсолютный минимум критерия реализуется симметричным питанием симметричной ЭМ напряжениями прямой последовательности. В этом случае все векторы модели $\begin{pmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{pmatrix} = Z^{-1}\bar{u}$ находятся в параметрически однородной плоскости $\alpha\beta$, а линейная зависимость фаз отсутствует.

В несимметричной ЭМ абсолютный минимум, как правило, нереализуем. Его реализации препятствует параметрическая неоднородность матриц рассеяния и линейная зависимость фаз. В данной ситуации целесообразно найти локальный минимум выражения (5.40), очевидно, принадлежащий границе области ограничений.

Учитывая тот факт, что для матрицы M_{rs} собственное число $\lambda_0 = 0$ (см. выражение (5.4)), имеются основания предполагать, что и в несимметричной ЭМ критерию (5.40) удовлетворяет равенство нулю токов нулевой последовательности $i_{s0} = i_{r0} = 0$. Тогда векторы токов рационального питания принадлежат плоскости $\alpha\beta$ и записываются как

$$\begin{aligned} \tilde{i}_s &= \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} \\ \tilde{i}_r &= \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix}, \\ \tilde{i}_{rs} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вместе с тем это не является обязательным условием. Об этом, в частности, свидетельствуют данные расчетного примера, приведенного в пункте 1.4.4

данного пособия. Питание по варианту 3 лишь незначительно снижает потери в цепи и не является точкой локального минимума критерия.

Дополнительные примеры, относящиеся к минимизации мощности рассеяния многофазных обмоток, приведены в следующей главе пособия и в приложении А.

5.8 Контрольные вопросы

1. Что представляют собой матрицы взаимной индукции ЭМ?
2. Поясните смысл допущений, принимаемых при анализе матриц взаимной индукции?
3. Каковы собственные числа и собственные векторы матрицы взаимной индукции ЭМ?
4. Как выглядит матрица взаимной индукции ЭМ при моногармоническом поле?
5. Как выглядит квадратичная форма электромагнитной мощности?
6. Токами каких подпространств реализуется электромагнитная мощность?
7. Как выглядит квадратичная форма механической мощности ЭМ?
8. Каковы структурные особенности полной параметрической матрицы ЭМ?
9. Каковы особенности параметрической матрицы симметричных ЭМ?
10. Каковы особенности параметрической матрицы статических устройств?
11. В чём причина параметрической анизотропии векторного пространства ЭМ?
12. Каковы возможности осуществления рационального питания ЭМ? Что накладывает ограничения на эти возможности?

6. ВИЗУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ МОЩНОСТИ МНОГОФАЗНЫХ ОБМОТОК

6.1 Минимизация мощности рассеяния обмотки

6.1.1 Постановка задачи минимизации мощности рассеяния

Прикладной аспект данного параграфа посвящен поиску системы фазных токов, минимизирующей мощность рассеяния многофазной обмотки ЭМ. Эта частная задача иллюстрирует принципы минимизации мощности рассеяния машины в целом. При решении задачи используются визуальные модели, приведенные на примерах трёхфазных обмоток. Здесь необходимо сделать два замечания.

1. Речь, в основном, идет о несимметричных обмотках. Опыт проектирования и эксплуатации ЭМ свидетельствует о том, что рассеяние симметричной обмотки минимально при симметричной системе фазных токов прямой (или обратной) последовательности. Менее известно то, что рассеяние обмотки также минимально при эллиптической системе токов прямой и обратной последовательности. Далее будет показано, что у симметричных обмоток оно минимально при любой системе фазных токов, не содержащей составляющих нулевой последовательности, в том числе и при подключениях многофазных обмоток к однофазному источнику питания. Свойства несимметричных обмоток в этом отношении требуют отдельного исследования.

2. У симметричных ЭМ минимизация рассеяния обмотки, подключенной к источнику питания, и минимизация рассеяния всей машины обеспечиваются симметричной системой фазных токов. В несимметричных машинах эти минимумы, как правило, не совпадают. Система токов, минимизирующая рассеяние обмотки, может оказаться нежелательной по соображениям низкой эффективности электромеханического преобразования энергии при её реализации. В такой ситуации необходим компромисс. Варианты систем фазных токов для его осуществления рассматриваются ниже.

Мощность m фазной обмотки p_z является суммой мощности рассеяния и главной мощности

$$p_z = p_\sigma + p.$$

Мощность рассеяния

$$p_\sigma = \sum_1^m \lambda_{\sigma i} i_i^2 \quad (6.1)$$

представляет собой квадратичную форму канонического вида в базисе фазных осей. Приблизительно оценим мощность рассеяния суммой

$$p_\sigma \approx p_{\sigma cp} = \left(\frac{1}{m} \sum_1^m \lambda_{\sigma i} \right) |\bar{i}|^2. \quad (6.2)$$

Для обмоток, у которых $\{\lambda_{\sigma i} = z_{\sigma i}, i = 1 \dots m\}$ (в том числе – симметричных) равенство (6.2) становится точным. Оценка (6.2), позволяет утверждать, что

мощность рассеяния, хотя бы приблизительно, минимизируется наименьшим по модулю вектором тока, обеспечивающим заданный уровень главной мощности $p = const$.

Главная мощность

$$p = (\bar{i}, M \bar{i}),$$

где M - квадратная матрица параметров само- и взаимоиндукции фаз размером $m \times m$, в фазных координатах представляет собой квадратичную форму неканонического вида. Уравнение

$$p = (\bar{i}, M \bar{i}) = const \quad (6.3)$$

имеет бесконечное множество решений. Действительно, если некоторый вектор

$$\bar{i} = \bar{i}_d + \bar{i}_q, \quad (6.4)$$

есть решение (6.3), соответствующее фиксированному значению параметра

$$\lambda_{\sigma} = \frac{p}{|\bar{i}_d|^2}, \quad (6.5)$$

то бесконечному множеству значений параметра

$$\lambda_{\sigma} \in [\lambda_1, \lambda_m]$$

по (4.34) соответствует бесконечное множество решений (6.3). Ему, согласно (6.4), (4.30), (4.31) отвечают продольное и поперечное подмножества токов, соответствующих мощности p .

Так как поперечное подмножество обладает нулевой мощностью в матрице M

$$(\bar{i}_q, M \bar{i}) = 0,$$

его мощность в матрице Z_{σ}

$$p_{\sigma q} = (\bar{i}_q, Z_{\sigma} \bar{i}) > 0 \quad (6.6)$$

является избыточной для данного значения главной мощности p .

Среди бесконечного множества решений системы (6.3) - (6.5) можно выбрать вектор тока с наименьшим модулем и, убрав, таким образом, избыточное рассеяние, минимизировать p_{σ} . Принимая во внимание замечание 2, целесообразно также найти некоторое множество векторов \bar{i} , решающих задачу минимизации рассеяния приближенно.

6.1.2 Решение задачи минимизации мощности рассеяния

Особенность обмоток ЭМ состоит в том, что они имеют симметрические параметрические матрицы, причем собственные числа главной матрицы $\{\lambda_i, i = 1 \dots m\}$ действительны и неотрицательны. В этом случае приведение квадратичной формы (6.3) к каноническому виду осуществимо всегда. Оно выполняется при помощи канонического преобразования координат вектора тока

$$\bar{i} = V \tilde{i}, \quad (6.7)$$

где \tilde{i} - вектор тока в канонических координатах, V - ортогональная матрица преобразования координат, составленная из собственных векторов \bar{v}_i матрицы M

$$V = (\bar{v}_i).$$

Векторы $\{\bar{v}_i, i = 1 \dots m\}$ задают главные оси матрицы M . Преобразование приводит M к диагональному виду $\tilde{M} = \text{diag}(\lambda_i, i = 1 \dots m)$, а квадратичную форму (6.3) к канонической форме записи

$$p = \sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{i}_i^2. \quad (6.8)$$

Здесь $\{\lambda_i, i = 1 \dots m\}$ - собственные числа матрицы M , упорядоченные по возрастанию, $\{\tilde{i}_i, i = 1 \dots m\}$ - канонические координаты вектора тока. Выражение (6.8) свидетельствует о том, что геометрическим местом токов неизменной мощности $p = \text{const}$ является m мерный эллипсоид с полуосями

$$\left(\sqrt{\frac{p}{\lambda_i}}, i = 1 \dots m \right).$$

График этой поверхности является визуальной моделью главной мощности обмотки.

Свойства визуальной модели в трехмерном пространстве и в пространстве большей размерности вполне аналогичны. Поверхность симметрична относительно осей канонических координат. Минимальный вектор тока располагается по оси \bar{v}_m , поскольку по ней расположена минимальная полуось эллипсоида

$$\sqrt{\frac{p}{\lambda_m}}.$$

Модуль минимального вектора тока равен длине этой полуоси. Минимальный вектор тока реализуется следующей системой фазных токов

$$\bar{i} = \bar{i}_{\min} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{i}_m \end{pmatrix} = \tilde{i}_m \cdot \bar{v}_m. \quad (6.9)$$

Так как \bar{v}_m имеет в качестве координат действительные числа, результат (6.9) реализуется подключением обмотки к однофазному источнику питания. Как уже отмечалось, однофазное питание не создает условий для эффективного электромеханического преобразования энергии. Поэтому необходимо искать возможности приближенного решения задачи минимизации на множестве многофазных токов.

Эллипс, лежащий в подпространствах наибольших собственных чисел λ_{m-1}, λ_m

$$\lambda_{m-1} \tilde{i}_{m-1}^2 + \lambda_m \tilde{i}_m^2 = p \quad (6.10)$$

образует геометрическое место векторов малых токов (ГММТ), модули которых наиболее близки к минимальному значению. Одним из векторов ГММТ является минимальный вектор тока по (6.9). В соответствии с (6.7), общее выражение для векторов, принадлежащих ГММТ

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{i}_{m-1} \\ \tilde{i}_m \end{pmatrix} = \tilde{i}_{m-1} \bar{v}_{m-1} + \tilde{i}_m \bar{v}_m. \quad (6.11)$$

Векторы $\tilde{i}_m \bar{v}_m$ и $\tilde{i}_{m-1} \bar{v}_{m-1}$ реализуются однофазным питанием, причем первый из них минимизирует мощность рассеяния точно, а второй - приближенно. Остальные векторы множества (6.11) реализуются асимметричным m фазным питанием обмотки и решают задачу минимизации рассеяния приближенно, но тем точнее, чем ближе вектор тока \bar{i} к вектору $\tilde{i}_m \bar{v}_m$.

Отдельно следует проанализировать энергетические свойства симметричных обмоток. У них

$$\lambda_{m-1} = \lambda_m$$

и, согласно (6.10), эллипс ГММТ вырождается в окружность минимальных токов с уравнением

$$\tilde{i}_{m-1}^2 + \tilde{i}_m^2 = \left(\sqrt{\frac{p}{\lambda_m}} \right)^2 \quad (6.12).$$

Здесь можно сделать те же выводы, что и по выражению (6.11) (оно по-прежнему справедливо), но следует добавить, что векторы тока, лежащие под углами $\pm \frac{\pi}{4}$ к осям \bar{v}_{m-1} и \bar{v}_m реализуются симметричными m фазными системами токов прямой или обратной последовательности. При этом любой вектор ГММТ (6.12) минимизирует мощность рассеяния.

6.2 Характерные примеры

Визуальные модели могут быть построены в пространстве, размерность которого больше трех, но наиболее наглядны они в трехмерном пространстве. В приводимых ниже примерах, поверхности неизменной мощности трехфазных обмоток $p=4$ о.е. строились по выражению (6.8). Контур ГММТ, обозначенный на рисунках символом L , строился по выражению (6.10). На графиках показаны главные оси $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ и оси фаз обмотки C, A, B - столбцы матрицы V^{-1} . Положение вектора минимального тока соответствует точке пересечения ГММТ с осью \bar{v}_3 .

6.2.1 Несимметричная обмотка с параметрической матрицей общего вида

Рассмотрим асимметричную трехфазную обмотку по подпункту 3.3.3.7 с главной параметрической матрицей вида

$$M = jx_{z1} \begin{pmatrix} m_{CC} & m_{AC} & m_{BC} \\ m_{CA} & m_{AA} & m_{BA} \\ m_{CB} & m_{AB} & m_{BB} \end{pmatrix} = jx_{z1} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет собственные числа $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{3}{2}$ (здесь и далее собственные числа главных матриц приводятся в долях от jx_{z1}) и матрицу канонического преобразования координат

$$V = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Поверхность неизменной мощности обмотки представлена на рисунке 6.1.

Любой точке поверхности соответствует определенный модуль вектора тока, равный $|\bar{i}| = |\tilde{i}| = \sqrt{\tilde{i}_1^2 + \tilde{i}_2^2 + \tilde{i}_3^2}$. Величины модулей токов точек поверхности находятся между минимальным значением на оси \bar{v}_3 ($2\sqrt{\frac{2}{3}}$ о.е.) и максимальным значением на оси \bar{v}_1 ($2\sqrt{2}$ о.е.). Таким образом, при неизменной мощности модуль тока данной обмотки может изменяться в $\sqrt{3}$ раз. Компонента вектора тока $\tilde{i}_1\bar{v}_1$ связана, в основном, с мощностью рассеяния, так как она удаляет вектор тока от ГММТ. Токи ГММТ, в соответствии с (6.11), равны

$$\begin{pmatrix} i_C \\ i_A \\ i_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tilde{i}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{i}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для точек, лежащих вне осей ГММТ, эти токи представляют собой асимметричные трехфазные системы, а для точек на осях – однофазные системы токов. В любом случае, за исключением случая питания обмотки минимальным током ($\tilde{i}_2 = 0$), фазные токи содержат составляющие нулевой последовательности, величиной $\frac{\sqrt{2}-2}{6} \tilde{i}_2$. Последние не являются для рассматриваемой обмотки особыми токами.

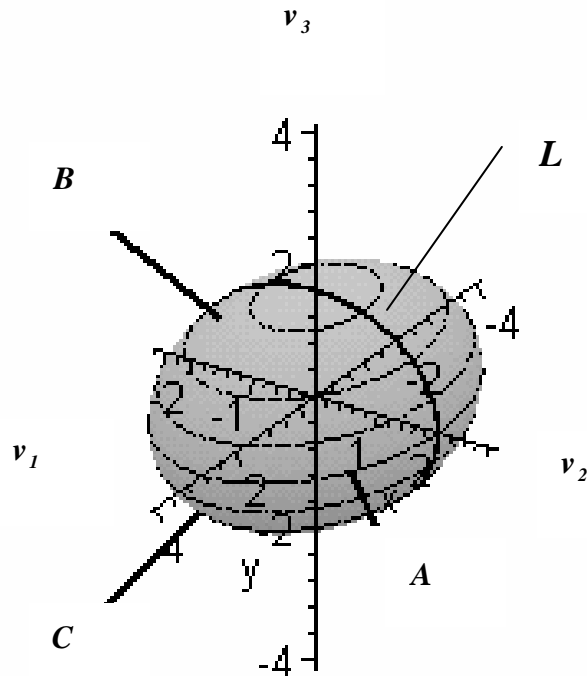


Рисунок 6.1 - Поверхность неизменной мощности несимметричной обмотки

6.2.2 Несимметричная обмотка с вырожденной параметрической матрицей

У таких обмоток (к ним, в частности, относятся и симметричные обмотки) токи вида $\tilde{i}_1 \tilde{v}_1$ являются особыми. В трехфазном исполнении матрицы параметров обмотки имеют одно собственное число, равное нулю.

Пусть обмотка имеет главную параметрическую матрицу вида (см. подпункт 3.3.3.5).

$$M = jx_{21} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Для неё собственные числа равны

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2,$$

а каноническое преобразование координат производится матрицей

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

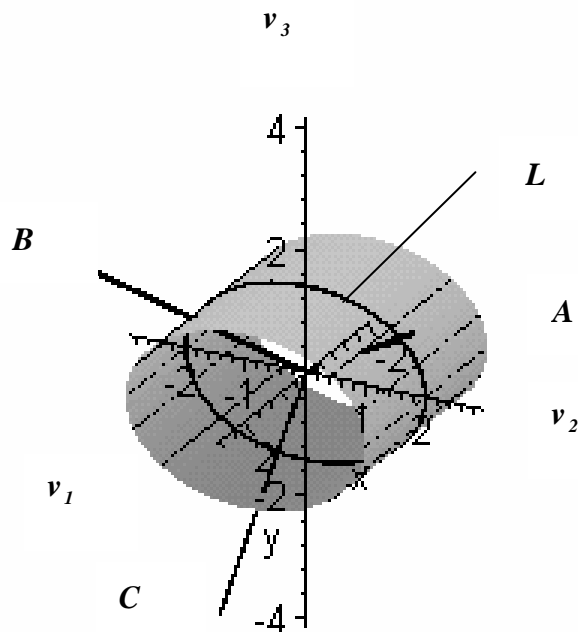


Рисунок 6.2 - Поверхность неизменной мощности несимметричной обмотки с вырожденной матрицей

Поверхность неизменной мощности, задается уравнением

$$p = 0 \cdot \tilde{i}_1^2 + 1 \cdot \tilde{i}_2^2 + 2 \cdot \tilde{i}_3^2 = 4 \quad (6.13)$$

и представляет собой эллиптический цилиндр, ориентированный по оси \bar{v}_1 и приведенный на рисунке 6.2.

Минимальный вектор тока, величиной $\sqrt{2}$ о.е., расположен по оси \bar{v}_3 , а ГММТ, как и в предыдущем случае, является эллипс, лежащий в плоскости \bar{v}_2, \bar{v}_3 . Любое отклонение вектора тока от точек ГММТ увеличивает его на компоненту $\tilde{i}_1 \bar{v}_1$. Она, согласно (6.13), не участвует в образовании мощности p , но повышает рассеяние, создавая в фазах обмотки токи

$$\begin{pmatrix} i_C \\ i_A \\ i_B \end{pmatrix} = \tilde{i}_1 \bar{v}_1 = \frac{\tilde{i}_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом, согласно (6.1), мощность избыточного рассеяния составит

$$p_{\text{отл}} = \lambda_{\sigma 1} i_C^2 + \lambda_{\sigma 2} i_A^2 + \lambda_{\sigma 3} i_B^2 = \frac{\lambda_{\sigma 1} + 2 \cdot \lambda_{\sigma 2} + \lambda_{\sigma 3}}{4} \tilde{i}_1^2.$$

Токи $\tilde{i}_1 \bar{v}_1$ в подобных обмотках участвуют только в рассеянии энергии. Их исключение из состава фазных токов в любом случае рационально и осуществляется питанием обмотки токами, принадлежащими ГММТ.

6.2.3 Симметричная обмотка

Частный, но практически важный случай имеет место, если вырожденная параметрическая матрица обмотки M имеет кратные собственные числа. В этом случае справедливы равенства $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3$. Они характерны для параметрических матриц симметричных и некоторых асимметричных обмоток.

Симметричная трехфазная обмотка (см. подпункт 3.3.3.2) имеет главную параметрическую матрицу вида

$$M = jx_{2л} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Для неё собственные числа равны

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = \frac{3}{2},$$

а каноническое преобразование координат производится матрицей

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Поверхность неизменной мощности, задаётся уравнением

$$p = 0 \cdot \tilde{i}_1^2 + \frac{3}{2}(\tilde{i}_2^2 + i_3^2) = 4$$

и представляет собой круговой цилиндр, ориентированный по оси \bar{v}_1 . Он приведен на рисунке 6.3. Токи $\tilde{i}_1 \bar{v}_1$ по-прежнему являются особыми, но в данном случае они

$$\begin{pmatrix} i_C \\ i_A \\ i_B \end{pmatrix} = \tilde{i}_1 \bar{v}_1 = \frac{\tilde{i}_1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{i}_1 \bar{n}_0$$

совпадают с токами нулевой последовательности.

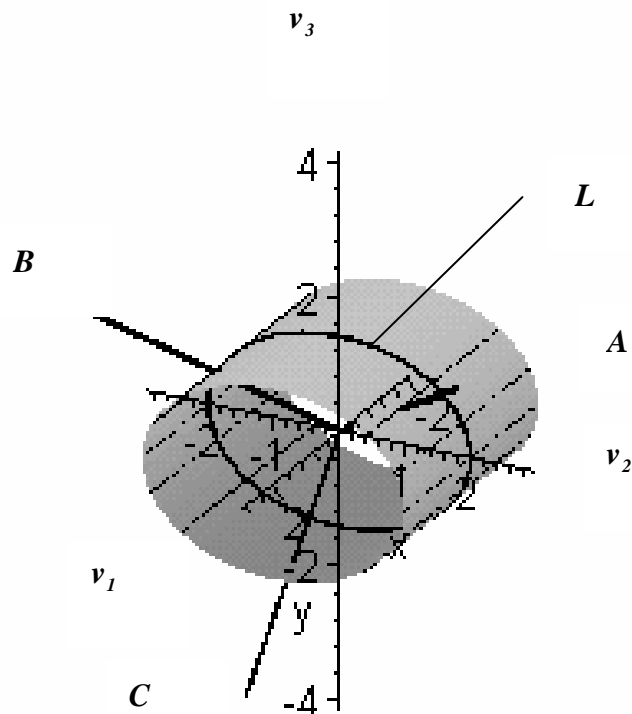


Рисунок 6.3 - Поверхность неизменной мощности симметричной обмотки

Как уже отмечалось, токи, принадлежащие ГММТ (см. выражение (6.11))

$$\begin{pmatrix} i_C \\ i_A \\ i_B \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\tilde{i}_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \tilde{i}_3 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right],$$

реализуются асимметричными ($\tilde{i}_3 \neq \pm j\tilde{i}_2$), симметричными ($\tilde{i}_3 = \pm j\tilde{i}_2$) или однофазными без нулевой последовательности ($\tilde{i}_3 = 0$ или $\tilde{i}_2 = 0$) системами фазных токов.

Таким образом, уровень рассеяния обмотки снижается при удалении из фазных токов особых составляющих и компонент, связанных с собственными числами, близкими к нулю. Рациональным является питание обмотки одним из векторов тока, принадлежащих ГММТ. Степень асимметрии токов этого вектора для ЭМ должна быть приемлема с точки зрения организации эффективного электромеханического преобразования энергии.

6.3. Визуальные модели продольного и поперечного подмножеств

Векторы продольного и поперечного подмножества в канонических базисах строились по выражениям (4.32), (4.33) для тех же обмоток, матрицы которых приведены в параграфе 6.2. На приведенных ниже графиках

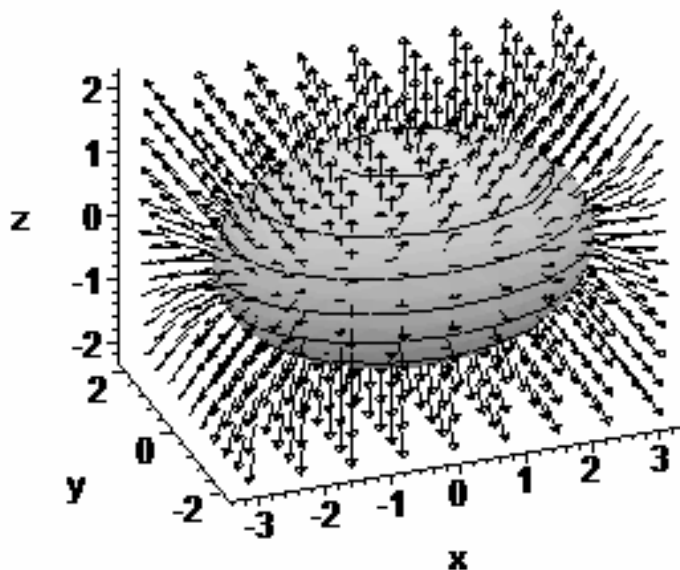


Рисунок 6.4 Векторы продольного подмножества

подмножества показаны полем стрелок. Как уже отмечалось, векторы продольного подмножества ортогональны поверхности $p = const = 4$, а векторы поперечного подмножества принадлежат касательным к этой поверхности. Для наглядности поверхности $p = 4$ о.е. тоже показаны на графиках.

6.3.1 Несимметричная обмотка с параметрической матрицей общего вида

Векторы продольного подмножества показаны на рисунке 6.4.

Канонические оси $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ обозначены на рисунке x, y, z соответственно.

Плотность векторов подмножества тем выше, чем выше значение эффективного собственного числа в данном направлении.

Векторы поперечного подмножества потока мощности обмотки показаны на рисунке 6.5. Ориентация векторов \tilde{i}_q по всем направлениям векторного пространства свидетельствует о том, что эффективное собственное число λ_3 изменяется при любой вариации координат. Плотность векторов подмножества тем ниже, чем ниже значение эффективного собственного числа в данном направлении.

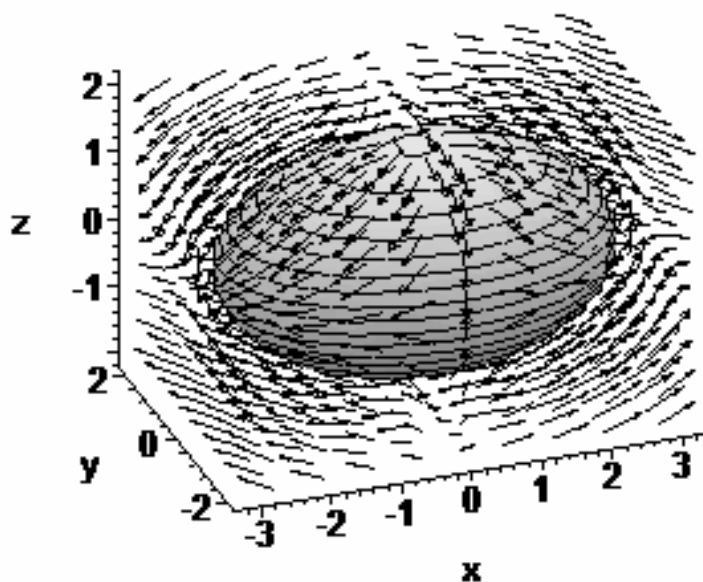


Рисунок 6.5 Векторы поперечного подмножества

6.3.2 Несимметричная обмотка с вырожденной параметрической матрицей

Векторы продольного подмножества для данной обмотки показаны на рисунке 6.6. Вырожденность параметрической матрицы по оси x (ось \bar{v}_1) приводит к тому, что векторы продольного подмножества имеют нулевые координаты по этой оси. Относительно других осей можно отметить, что поток мощности (плотность векторов \tilde{i}_d) более интенсивен по оси z (ось \bar{v}_3) и менее интенсивен по оси y (ось \bar{v}_2). Это связано с различием собственных чисел матрицы M по этим осям.

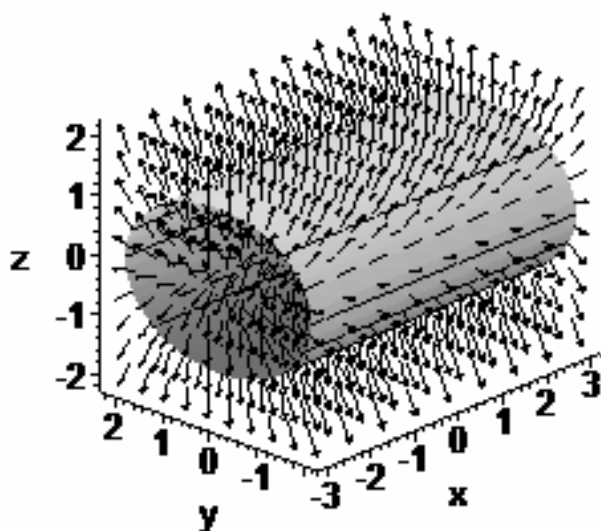


Рисунок 6.6 Векторы продольного подмножества

Векторы поперечного подмножества \tilde{i}_q показаны на рисунке 6.7. В него, преимущественно, входят векторы, ориентированные по оси x . Вместе с тем, в нём имеются векторы, ориентированные по другим каноническим осям.

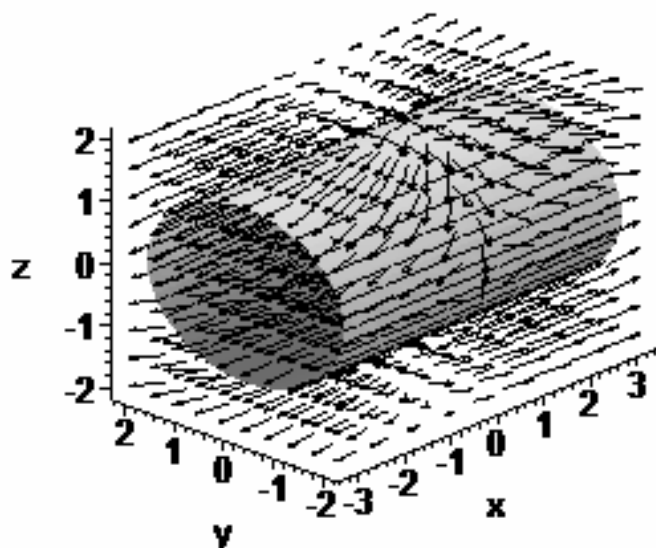


Рисунок 6.7 Векторы поперечного подмножества

6.3.3 Симметричная обмотка

Векторы продольного подмножества токов симметричной обмотки показаны на рисунке 6.8.

Они имеют одинаковую плотность по всем направлениям плоскости, образованной осями y и z . Векторы, ориентированные по оси x , в данном случае в продольное подмножество не входят.

Векторы поперечного подмножества показаны на рисунке 6.9. Оно целиком состоит из векторов, ориентированных по оси x .

Очевидно, что в случае симметричной обмотки продольное и поперечное подмножества токов взаимно ортогональны.

Подводя общий итог данного раздела пособия, отметим, что энергетические процессы в ЭМ могут успешно изучаться на визуальных моделях. В них топологические аспекты теории электрических машин наиболее наглядны.

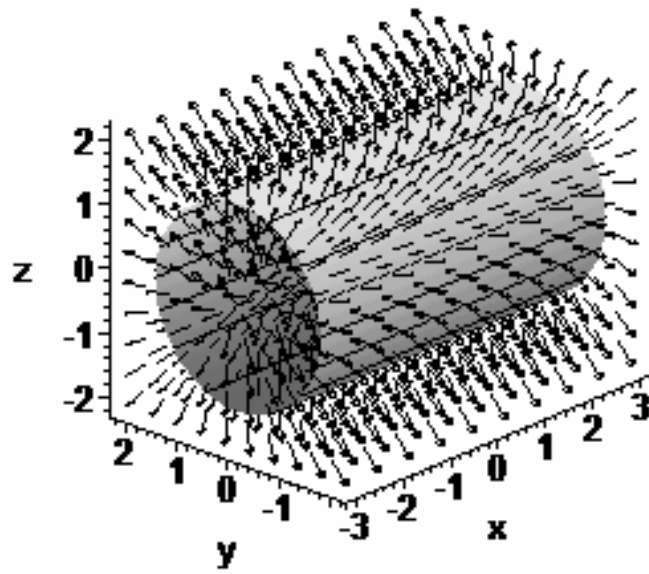


Рисунок 6.8 Векторы продольного подмножества

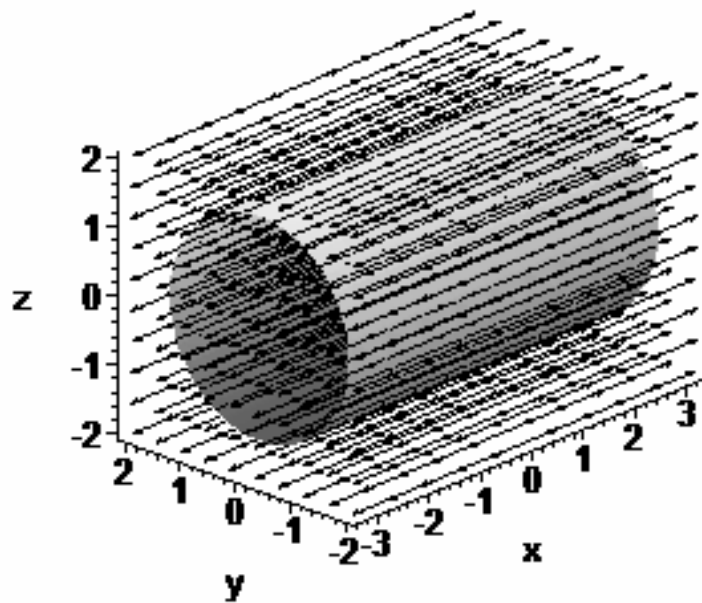


Рисунок 6.9 Векторы поперечного подмножества

6.4 Контрольные вопросы

1. Что такое "избыточное рассеяние обмотки"? Какова его мощность?
2. Как можно снизить мощность рассеяния обмотки?
3. Как формулируется задача минимизации мощности рассеяния обмотки?
4. Что такое "визуальная модель главной мощности обмотки"?
5. Каковы свойства визуальной модели главной мощности?
6. Что такое ГММТ?
7. Где располагается ГММТ на визуальной модели?
8. Что представляет собой поверхность неизменной мощности несимметричной обмотки?
9. Что представляет собой поверхность неизменной мощности несимметричной обмотки с вырожденной параметрической матрицей?
10. Что представляет собой поверхность неизменной мощности симметричной обмотки?
11. Что представляет собой продольное подмножество токов несимметричной обмотки?
12. Что представляет собой поперечное подмножество токов несимметричной обмотки?
13. Что представляет собой продольное подмножество токов несимметричной обмотки с вырожденной параметрической матрицей?
14. Что представляет собой поперечное подмножество токов несимметричной обмотки с вырожденной параметрической матрицей?
15. Что представляет собой продольное подмножество токов симметричной обмотки?
16. Что представляет собой поперечное подмножество токов симметричной обмотки?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал учебного пособия объединяет взгляд авторов на электрическую машину как на физическую реализацию одного из объектов класса линейных операторов простой структуры. Пособие обобщает научные работы авторов последних лет, приведенные в списке литературы, а также читаемые ими учебные курсы.

Неотъемлемыми свойствами матрицы линейного оператора являются структурные свойства, выраженные понятиями «число строк (столбцов)», «определитель», «ранг», «норма». Столь же неотъемлемыми свойствами ЭМ являются число фаз, число независимых токов (потокосцеплений), удельная мощность. В структурном отношении электрическая машина – это параметрическая матрица определенного класса. Для симметричных машин – это матрицы тёплицевого типа, для несимметричных – более общий класс матриц.

Неотъемлемыми свойствами матрицы являются её топологические свойства, выраженные понятиями «векторное пространство», «линейный оператор», «преобразование координат». Столь же неотъемлемыми свойствами ЭМ являются всевозможные комбинации токов (потокосцеплений), явления само- и взаимной индукции, трансформации токов как взаимные, так и собственные. В упомянутые комбинации токов входят как теоретически возможные, так и практически осуществляемые комбинации, заключенные в понятие «режим ЭМ». С топологической точки зрения электрическая машина – это преобразователь координат, действующий в определенном векторном пространстве.

Неотъемлемым свойством матрицы оператора являются её энергетические свойства, выраженные понятием «квадратичная форма матрицы для данного вектора». Неотъемлемым свойством ЭМ является её мощность для данного набора фазных токов. Матрица структурирует мощность вектора пропорционально собственным числам. Электрическая машина структурирует мощность тока пропорционально сопротивлениям эквивалентных фаз. В энергетическом плане электрическая машина – это матрица, осуществляющая приведение квадратичной формы тока к каноническому виду.

Таким образом, на уровне параметрических представлений, электрическую машину можно определить как физическую реализацию матрицы, осуществляющую электромеханическое преобразование энергии посредством канонических преобразований координат. Поскольку речь идет об уровне параметрических представлений об электрической машине, постольку матричная теория электрических машин может называться и параметрической теорией.

Авторы выражают надежду в том, что материал учебного пособия окажется полезным студентам, специалистам, аспирантам, научным работникам занимающимся параметрическими, топологическими и энергетическими аспектами электромеханического преобразования энергии, а

также всем, кто занимается математическим моделированием матричных объектов в различных областях знаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэнкок Н. Матричный анализ электрических машин/ Пер. с англ. – М.: Энергия, 1967. – 224 с.
2. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) /Пер. с англ. М.: Наука, 1972. – 544 с.
3. Крон Г. Тензорный анализ сетей / Пер. с англ. М.: Советское радио, 1978. – 720 с.
4. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.
5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 304 с.
6. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике/ МЦМНО, 2007. – 392 с.
7. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. – 128 с.
8. Артым А.Д. Матрично-топологические методы анализа электрических цепей с применением ЭВМ: учеб. пособие – Ленингр. электротехн. ин-т связи им. М.А. Бонч-Бруевича, 1987. – 81 с.
9. Тафт В.А. Электрические цепи с переменными параметрами. – М.: Энергия, 1968. – 327 с.
10. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
11. Иванов – Смоленский А.В. Электрические машины./Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1980. – 928 с.
12. Электрические машины: учеб. пособие/В.Я. Беспалов, Н.Ф. Котеленец.- М.: Академия, 2006 – 313 с.
13. Электрические машины: учебник/ И.П. Копылов. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 607 с.
14. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: Учеб. для вузов по спец. «Электрические машины». – М.: Высш. шк., 1987. – 248 с.
15. Проектирование электрических машин: учебник/О.Д. Гольдберг, И.С. Свириденко. – 3-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 2006. – 430 с.
16. Иванов - Смоленский А.В. Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах. - М.: Высшая школа, 1989. - 312 с.
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
18. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 271 с.
19. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов: Пер. с нем. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
20. Мамедов Ф.А., Курилин С.П. Об определении активной и реактивной мощности для асимметричных электрических машин/ Электротехника, 2001, №4. – С. 17 – 21.

21. Mamedov F., Kurilin S., Tchutorov D. Ideal no – load operation and asymmetry of phases of low speed linear induction machine.// Proceedings of the 5th international conference on unconventional electromechanical and electrical systems. 05 – 08 September 2001, Szczecin and Miedzyzdroje, Poland. – Szczecin, 2001, Volume 2. Pages 323 – 328.
22. Mamedov F., Kurilin S., Zavodianskaya H.// Proceedings of the 5th international conference on unconventional electromechanical and electrical systems. 05 – 08 September 2001, Szczecin and Miedzyzdroje, Poland. – Szczecin, 2001, Volume 2. Pages 329 – 334.
23. Мамедов Ф.А., Денисов В.Н., Курилин С.П. Параметрические свойства и особенности энергетики асимметричных обмоток электрических машин./ Труды четвертого международного симпозиума «ЭЛМАШ - 2002», том 2. – М.: сентябрь 2002 .- С. 85 – 88.
24. Мамедов Ф.А., Денисов В.Н., Курилин С.П. Особенности энергетических процессов в электрических машинах с асимметричными обмотками/ Электричество, 2002, № 9. – С. 36 – 43.
25. Денисов В.Н., Курилин С.П. Визуальные модели мощности многофазных обмоток/ Труды пятого международного симпозиума ЭЛМАШ – 2004. «Перспективы и тенденции развития электротехнического оборудования» - 11 – 15 октября 2004 г. – М, Россия. – т.1. – С.105 – 111.
26. Денисов В.Н., Курилин С.П. Визуализация математических моделей мощности многофазных обмоток/ Материалы международной научно-технической конференции «Электромеханические преобразователи энергии». Россия, Томск, 20 –22 октября 2005 г. – С. 131-134.
27. Денисов В.Н., Курилин С.П. Параметрическая матрица электрической машины переменного тока// Актуальные проблемы энергосберегающих электротехнологий. Труды Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. Екатеринбург: ГОУВПО УГТУ – УПИ, 2006 – с.200 – 202.
28. Денисов В.Н., Курилин С.П. Преобразование координат и параметрические свойства электрических машин переменного тока.// Актуальные проблемы энергосберегающих электротехнологий. Труды Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. Екатеринбург: ГОУВПО УГТУ – УПИ, 2006 – с.203 – 207.
29. Денисов В.Н., Курилин С.П. Особенности параметрических матриц электрических машин.// Труды XI-ой Международной конференции «Электромеханика, электротехнологии, электротехнические материалы и компоненты», МКЭЭЭ – 2006 (ICEEE - 2006). Часть 1. – С. 260 – 261.
30. Денисов В.Н., Курилин С.П. Виды и свойства параметрических матриц математических моделей электрических машин. Информационные системы и модели в научных исследованиях, промышленности и экологии// Всероссийская научно-техническая конференция/ Под общей редакцией д-ра техн. наук, проф. Панарина В.М. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 115 – 117.

31. Денисов В.Н., Курилин С.П. Подход к вопросам энерго- и ресурсосбережения в АПК с использованием свойств матриц.// Вестник Российского государственного аграрного заочного университета. Научный журнал – Балашиха 8, Московской области: Изд-во РГАЗУ, 2006, №1 (6) – С. 242 – 243.
32. Денисов В.Н., Курилин С.П. Преобразования координат в системном подходе к вопросам энерго- и ресурсосбережения в АПК.// Вестник Российского государственного аграрного заочного университета. Научный журнал – Балашиха 8, Московской области: Изд-во РГАЗУ, 2006, №1 (6) – С. 243 – 244.
33. Денисов В.Н., Курилин С.П. Использование векторных пространств в математическом моделировании электрических машин.// Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике. Материалы VI Всероссийской научно-технической конференции. Чебоксары. 7-9 июня 2006 г.- Изд-во ЧГУ, Чебоксары, 2006. - с.110-113.
34. Круглов В.В., Усков А.А. Устойчивость больших систем // Программные продукты и системы. 2007. № 1. С. 35-36.
35. Денисов В.Н., Курилин С.П. Преобразование координат и анализ параметрических свойств электрических машин.// Электричество, 2007, № 6. – С. 45 – 50.
36. Мамедов Ф.А., Денисов В.Н., Курилин С.П. Применение функций Грина для анализа электрооборудования в сельском хозяйстве // Техника в сельском хозяйстве, 2008, № 2. – С. 21 – 25.
37. Мамедов Ф.А., Денисов В.Н., Курилин С.П. Применение функций Грина к анализу электромеханических систем при диагностике электрооборудования в сельском хозяйстве.// Энергообеспечение и энергосбережение в сельском хозяйстве./ Труды 6-й международной научно-технической конференции (13 -14 мая 2008 года, г. Москва, ГНУ ВИЭСХ). В 5-ти частях. Часть 3. Энергосберегающие технологии в животноводстве и стационарной энергетике. – М.: ГНУ ВИЭСХ, 2008. – С. 416 – 420.
38. Курилин С.П., Денисов В.Н., Круглов В.В. Матричная теория электрических машин.// М: АНО ВПО ЦС РФ «Российский университет кооперации», 2008. – 132 с.
39. Денисов В.Н., Курилин С.П. Метод расчета нелинейных электромеханических систем.// Труды XII международной конференции «Электромеханика, электротехнологии, электротехнические материалы и компоненты» МКЭЭЭ-2008. / М: Институт электротехники МЭИ (ТУ), 2008 – С. 201.
40. Денисов В.Н., Курилин С.П. Основы матричной диагностики асинхронных электродвигателей.// Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-22: сб. трудов XXII Междунар. научн. конф.: в 10 т. Т.8 Секция 9/ под общ. ред. В.С. Балакирева. - Псков: Изд-во Псков. гос. политехн. ин-та, 2009.-244 С.71-74.

41. Курилин С.П., Денисов В.Н. Визуальные модели векторных пространств и проблемы энергосбережения/ Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – Вып. 11. – С. 45 – 46.
42. Асинхронные двигатели серии 4А: Справочник/А.Э. Кравчик, М.М. Шлаф, В.И. Афонин, Е.А. Соболенская. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 504 с.
43. Проектирование электрических машин: Учеб. для вузов /И.П. Копылов, Б.К. Клоков, В.П. Морозкин, Б.Ф. Токарев; Под ред. И.П. Копылова. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 2002. – 757 с.
44. Денисов В.Н., Курилин С.П. Инженерная модель линейного асинхронного двигателя. // Электричество, 2011, № 3. – С. 52 – 54.
45. Денисов В.Н., Круглов В.В., Курилин С.П. Мощности параметрически неоднородных систем.// Информатика, математическое моделирование, экономика: Сборник научных статей по итогам Международной научно-практической конференции/ Смоленск, 22 апреля 2011 г. В 2-х томах. Том 2 – Смоленск: Смоленский филиал АНО ВПО ЦС РФ "Российский университет кооперации", 2011. – С. 53 – 61

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ К ЗАДАЧАМ ДИАГНОСТИКИ АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ

А.1. Общие положения

Одним из наиболее перспективных направлений практического использования векторно-матричной теории ЭМ является диагностика технического состояния асинхронных электродвигателей. Цели диагностики достаточно разнообразны, но выделяются два основных вида диагностического обследования:

- эксплуатационная диагностика проводится, как правило, на технически исправных машинах. Она имеет целью получение заключения о степени эксплуатационного износа объекта, а также о возможности и целесообразности его дальнейшей эксплуатации;

- ремонтная диагностика проводится в тех случаях, когда становятся заметны аномалии в работе машины. В данном случае цель обследования – обнаружение неисправности и получение заключения о возможности и целесообразности ремонта.

Следует отметить, что асинхронные двигатели являются достаточно проблемными объектами диагностики. Эксплуатационная диагностика не предполагает демонтажа и разборки машины. Нежелательны даже кратковременные остановки технологического процесса. В таких условиях информация, поступающая по электрическому, магнитному, механическому, тепловому и виброакустическому входам имеет весьма интегрированный вид. Судить по ней о состоянии соответствующих цепей машины так же сложно, как судить по интегралам о подынтегральных функциях. При ремонтной диагностике двигатель демонтируется и разбирается, но такие узлы как пакеты сердечников и короткозамкнутые клетки ротора создают схожие проблемы. К тому же получить информацию о равномерности воздушного зазора и состоянии магнитопровода можно только в собранной машине.

При разработке методов диагностического обследования одной из ключевых задач является поиск диагностических факторов, адекватных поставленным целям. Под диагностическими факторами понимаются сигналы, поступающие с входов машины, информация которых позволяет сделать адекватное заключение о её состоянии. С точки зрения практики проведения испытаний, электрический вход предпочтительнее, так как обладает наименьшей инертностью и имеет развитую инструментально-методическую поддержку измерений.

Задача, как правило, решается методами математического моделирования. На модели имитируются эталонное (неповрежденное) состояние машины и различные повреждения. Фиксируются изменения сигналов электрического входа.

Ниже приводятся два примера процедуры подбора диагностических факторов для случаев повреждения обмоток статора и короткозамкнутого

ротора асинхронного электродвигателя. Расчеты производятся на примере двигателя 4A160S4Y3 мощностью 15 кВт. Технические данные и параметры двигателя приводятся по [42 - 43].

Номинальная мощность, Вт	15000
Номинальное напряжение, В	220/380
Номинальный ток, А	29,3
Номинальное скольжение, о.е.	0,028
Число пар полюсов, о.е.	2
Номинальный КПД, о.е.	0,892
Номинальный коэффициент мощности, о.е.	0,894
Число стержней клетки ротора	38
Активное сопротивление обмотки статора, о.е.	0,047
Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора, о.е.	0,090
Активное сопротивление обмотки ротора, о.е.	0,0248*
	в том числе - стержня
	0,0171*
	в том числе – одного элемента короткозамыкающего кольца
	0,00385*
Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки ротора, о.е.	0,121*
	в том числе - стержня
	0,107*
	в том числе – одного элемента короткозамыкающего кольца
	0,007*

* - параметры ротора приведены к токам стержней и числу витков обмотки статора.

Расчеты по выражениям параграфов 3.2 и 4.9 были выполнены в среде Maple 11 и приводятся ниже в виде двух mws-файлов. Расчеты даны в относительных единицах. Мощности рассеяния обмотки статора приводятся дополнительно в абсолютных единицах. Были приняты следующие значения базовых величин.

Базовый ток, А	29,3
Базовое напряжение, В	220
Базовое сопротивление, Ом	7,509
Базовая мощность, Вт, ВАр, ВА	6446
Базовая угловая частота, с ⁻¹	100 π

А.2. Моделирование повреждения обмотки статора

Моделирование производится на основе выражений (3.1), (3.2). Сравниваются уровни мощности рассеяния обмотки для случаев неповрежденной и поврежденной обмотки. Система фазных токов предполагается симметричной, с номинальными значениями токов.

> **restart:with(LinearAlgebra) :**

При выборе базовых значений использованы номинальные фазные значения тока и напряжения электродвигателя 4A160S4Y3

> **Ib:=29.3;#Базовый ток, А**

Ib := 29.3

> **Ub:=220;#Базовое напряжение, В**

Ub := 220

> **Pb:=Ub*Ib;#Базовая мощность, Вт, ВАр, ВА**

$$P_b := 6446.0$$

> Zb:=Ub/Ib;#Базовое сопротивление, Ом
 $Z_b := 7.508532423$

>

А.2.1. Неповрежденная обмотка статора

> Z[sigma,s]:= z*⟨⟨1,0,0|⟨0,1,0|⟨0,0,1⟩⟩;# Общий вид параметрической матрицы рассеяния, z=0.047+I*0.090 для 4A160S4Y3

$$Z_{\sigma,s} := \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

> Is:=⟨exp(I*2*Pi/3),exp(0),exp(I*4*Pi/3)⟩;#Вектор фазных токов статора (единичные симметричные токи прямой последовательности)

$$I_s := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

> ModIs:=(VectorNorm(Is,2));#Модуль вектора тока статора
 $ModI_s := \sqrt{3}$

> U[sigma,s]:=MatrixVectorMultiply(Z[sigma,s],Is);# Вектор падения напряжения на матрице рассеяния

$$U_{\sigma,s} := \begin{bmatrix} z \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3} \right) \\ z \\ z \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3} \right) \end{bmatrix}$$

> ModU[sigma,s]:=z*(VectorNorm(U[sigma,s]/z,2));#Модуль вектора напряжения

$$ModU_{\sigma,s} := z\sqrt{3}$$

> phi[sigma]:=Re(evalf(VectorAngle(U[sigma,s]/z,Is,conjugate=true)));# Пространственный угол между векторами напряжения и тока

$$\phi_{\sigma} := 0.$$

> 'cos(phi[sigma])'=cos(phi[sigma]);#Коэффициент мощности энергопотребления матрицы рассеяния свидетельствует о том, что продольный ток составляет 100% полного тока

$$\cos(\phi_{\sigma}) = 1.$$

> 'sin(phi[sigma])'=sin(phi[sigma]);#Коэффициент мощности энергообмена матрицы рассеяния свидетельствует о том, что поперечный ток составляет 0% полного тока

$$\sin(\phi_{\sigma}) = 0.$$

```
> S[sigma,s]:=expand((DotProduct(Is,U[sigma,s])));#Мощность
рассеяния обмотки в относительных единицах

$$S_{\sigma,s} := 3 z$$

```

```
> z:=0.047+I*0.090:#Мощность рассеяния обмотки в абсолютных
единицах
```

```
> S[sigma,s]:=S[sigma,s]*Pb;

$$S_{\sigma,s} := 908.8860 + 1740.4200 I$$

```

Рассчитанная выше параметрически однородная (симметричная) обмотка не возбуждает поперечный энергообмен. Определённые величины потерь активной (908,9 Вт) и реактивной (1740,4 ВАр) мощности следует считать неизбежными и соответствующими реализованному в двигателе 4A160S4Y3 уровню технологии и культуры производства.

A.2.2. Поврежденная обмотка статора

Пусть по причинам, связанным с нарушениями технологического процесса изготовления, нарушениями правил эксплуатации или в результате эксплуатационного старения сопротивление рассеяния одной из фаз статора повысилось на 10%. Рассчитаем мощности рассеяния обмотки для токов прямой последовательности.

```
> z:='z':Z[sigma,s] := z*<<1,0,0|<0,1,0|<0,0,1.1>>;# Общий вид
параметрической матрицы рассеяния, z=0.047+I*0.090 для 4A160S4Y3
```

$$Z_{\sigma,s} := \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 z \end{bmatrix}$$

```
> Is:=<exp(I*2*Pi/3),exp(0),exp(I*4*Pi/3)>;#Вектор фазных токов
статора (единичные симметричные токи прямой последовательности)
```

$$I_s := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> ModIs:=((VectorNorm(Is,2));#Модуль вектора тока статора

$$ModI_s := \sqrt{3}$$

```

```
> U[sigma,s]:=MatrixVectorMultiply(Z[sigma,s],Is);# Вектор падения
напряжения на матрице рассеяния
```

$$U_{\sigma,s} := \begin{bmatrix} z \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \right) \\ z \\ 1.1 z \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \right) \end{bmatrix}$$

```
> ModU[sigma,s]:=z*((VectorNorm(U[sigma,s]/z,2));#Модуль вектора
падения напряжения
```

$$ModU_{\sigma,s} := 1.791647287 z$$

```
> phi[sigma]:=Re(evalf(VectorAngle(U[sigma,s]/z,
Is,conjugate=true)));# Пространственный угол между векторами
напряжения и тока
```

$$\phi_{\sigma} := 0.04558818612$$

```
> 'cos(phi[sigma])'=cos(phi[sigma]);#Коэффициент мощности
энергопотребления матрицы рассеяния свидетельствует о том, что
продольный ток составляет 99.9% полного тока
```

$$\cos(\phi_{\sigma}) = 0.9989610386$$

```
> 'sin(phi[sigma])'=sin(phi[sigma]);#Коэффициент мощности
энергообмена матрицы рассеяния свидетельствует о том, что
поперечный ток составляет 4.6% полного тока
```

$$\sin(\phi_{\sigma}) = 0.04557239690$$

```
> S[sigma,s]:=expand(DotProduct(Is,U[sigma,s]));#Мощность
рассеяния обмотки в относительных единицах совпадает с мощностью
продольного процесса
```

$$S_{\sigma,s} := 3.1 z$$

```
> Sd:=expand(evalf(ModU[sigma,s]*ModIs*cos(phi[sigma])));#Мощность
продольного процесса
```

$$Sd := 3.100000002 z$$

```
> Sq:=expand(evalf(ModU[sigma,s]*ModIs*sin(phi[sigma])));# Мощность
поперечного процесса представляет собой мощность междуфазного
энергообмена
```

$$Sq := 0.1414213618 z$$

```
> z:=0.047+I*0.090:#Мощности в абсолютных единицах
```

```
> 'S[sigma,s]'=S[sigma,s]*Pb;
```

$$S_{\sigma,s} = 939.18220 + 1798.43400 I$$

```
> 'Sd'=Sd*Pb;
```

$$Sd = 939.1822006 + 1798.434001 I$$

```
> 'Sq'=Sq*Pb;
```

$$Sq = 42.84529862 + 82.04418882 I$$

Рассчитанная выше параметрически неоднородная (несимметричная) обмотка имеет не только повышенные уровни рассеяния активной (939,2 Вт) и реактивной (1798,4 ВАр) мощности, но и возбуждает поперечный энергообмен. Мерой интенсивности обмена является пространственный угол между векторами напряжения и тока, равный 0,046 радиан. Обмен, совокупной мощностью в ВА

```
> 'abs(Sq)'=abs(Sq*Pb);
```

$$|Sq| = 92.55791988$$

идет в формах активной (42.85 Вт) и реактивной (82.04 ВАр) мощности. Мощности обмена избыточны, так как даже косвенно не связаны с электромеханическим преобразованием энергии. В качестве диагностического фактора, указывающего на повреждение обмотки статора, может использоваться пространственный угол между векторами напряжения и тока.

А.3. Моделирование повреждения короткозамкнутой клетки ротора

Моделирование производится на основе выражений (4.63), (4.64). Сравниваются токи стержней неповрежденной клетки и клетки с поврежденным стержнем. Система питающих фазных ЭДС предполагается симметричной, с номинальными значениями ЭДС.

```
> restart;with(linalg):with(plots):
```

При выборе базовых значений использованы номинальные фазные значения тока и напряжения электродвигателя 4А160S4У3

```
> Ib:=29.3;#Базовый ток, А
```

```
Ib := 29.3
```

```
> Ub:=220;#Базовое напряжение, В
```

```
Ub := 220
```

```
> Zb:=Ub/Ib;#Базовое сопротивление, Ом
```

```
Zb := 7.508532423
```

Технические данные и параметры элементов клетки.

```
> p:=2:#Число пар полюсов
```

```
> z2:=38:#Число стержней
```

```
> Sn:=0.028:# Номинальное скольжение
```

Параметры приведены к токам стержней и числу витков обмотки статора

```
> Rc:=.0171;Xc:=.107;# Сопротивление стержня, о.е.
```

```
Rc := 0.0171
```

```
Xc := 0.107
```

```
> Rk:=.00385;Xk:=.007;# Сопротивление элемента кольца, о.е.
```

```
Rk := 0.00385
```

```
Xk := 0.007
```

Комплексные сопротивления кольца (два элемента) и стержня

```
> Zy:=2*(Rk/Sn+I*Xk);
```

```
Zy := 0.2750000000 + 0.014 I
```

```
> Zct:=Rc/Sn+I*Xc;
```

```
Zct := 0.6107142857 + 0.107 I
```

А.3.1. Неповрежденная клетка

```
> Zksigma:=Matrix(1..z2,1..z2):
```

```
> for i from 1 to z2 do Zksigma[i,i]:=(Zy+Zct+Zct): end do:
```

```
> for i from 1 to z2 do for j from 1 to z2 do if abs(i-j)=1 then  
Zksigma[i,j]:=-Zct; Zksigma[j,i]:=-Zct; end; end do; end do;
```

```
> Zksigma[z2,1]:=-Zct;Zksigma[1,z2]:=-Zct:#Параметрическая матрица
```

```
> Zksigma;#Просмотр матрицы с помощью Matrix Browser
```

```

38 x 38 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order

```

Вектор питающих ЭДС

```

> Evec:=Vector(Z2):
> i:=0: for i from 1 to Z2 do Evec[i]:=exp(-I*i*2*Pi*p/Z2): end
do:

```

Токи клетки

```

> Ik:=linsolve(Zksigma,Evec):
> A[i2] := [[n,abs(Ik[n])] $n=1..Z2]:# Контурные токи (токи в
короткозамыкающих кольцах)
> for i from 1 to Z2-1 do Is[i]:=Ik[i]-Ik[i+1]: end do:#Токи в
стержнях
> Is[Z2]:=Ik[Z2]-Ik[1]:
> A[ic2] := [[Re(Is[n]),Im(Is[n])]
$n=1..Z2]:Imax:=[[n,sqrt(Re(Is[n])^2+Im(Is[n])^2)]$n=1..Z2]:#Ампли-
туды токов в стержнях клетки.

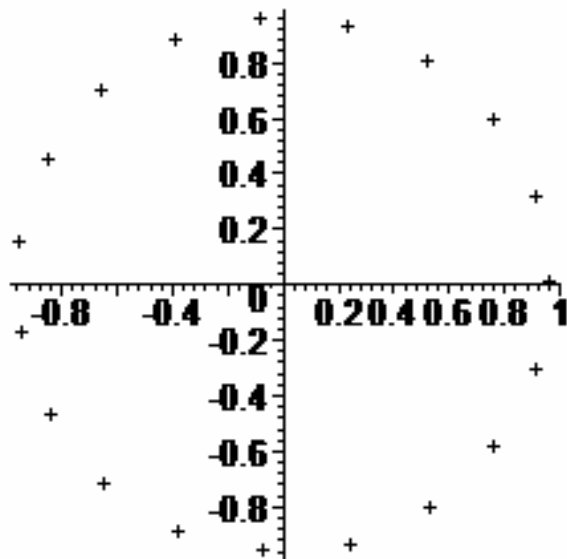
```

```

>
plot(A[ic2],style=point,symbol=cross,color=black,scaling=constrain-
ed,title="Токи симметричной клетки");#Векторы токов в стержнях на
комплексной плоскости показаны ниже

```

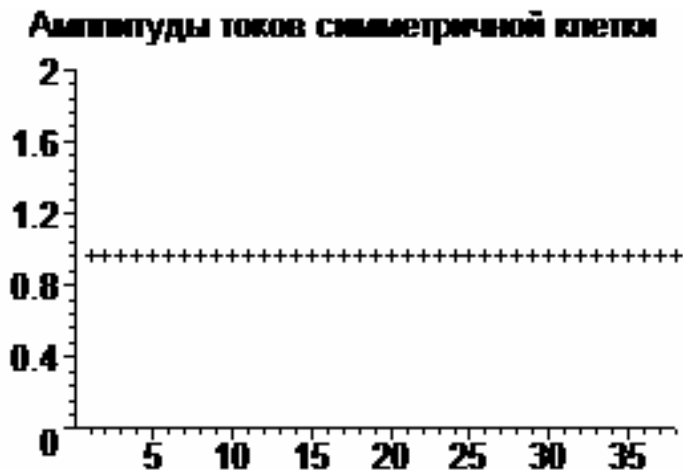
Токи симметричной клетки



```

> plot(Imax,style=point,symbol=cross,color=black,view=[0..Z2,
0..2],title="Амплитуды токов симметричной клетки");# Амплитуды
токов показаны ниже

```



А.3.2. Клетка с поврежденным стержнем

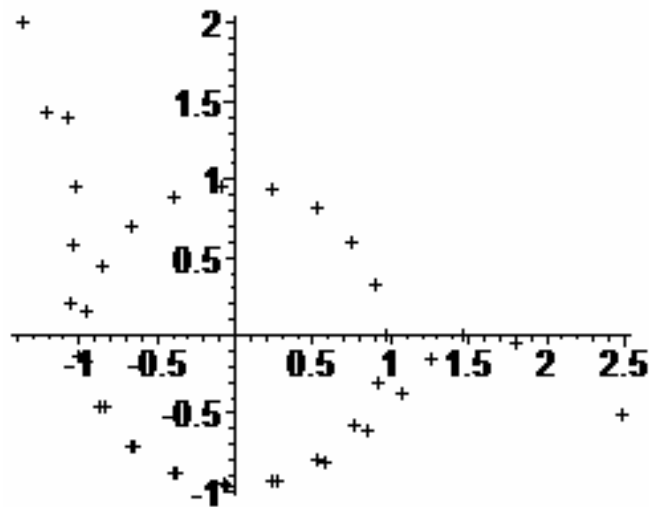
Пусть под действием эксплуатационного старения, развития трещин и микрополостей проявились ранее незаметные дефекты литья. В результате активное сопротивление одного из стержней повысилось в два раза. Предполагается повреждение стержня с условным номером 19.

```
>
k:=2.0:Zksigma[Z2/2,Z2/2]:=(Zy+k*Rc/Sn+I*Xc+Zct):Zksigma[Z2/2,Z2/2+1]:=-
(k*Rc/Sn+I*Xc):Zksigma[Z2/2+1,Z2/2]:=- (k*Rc/Sn+I*Xc):#
Параметрическая матрица
> Zksigma;#Просмотр матрицы с помощью Matrix Browser
[ 38 x 38 Matrix
  Data Type: anything
  Storage: rectangular
  Order: Fortran_order ]
```

Токи клетки

```
> Ik:=linsolve(Zksigma,Evec):
> A[i2] := [[n,abs(Ik[n])] $n=1..Z2/2]:# Контурные токи (токи в короткозамыкающих кольцах)
> for i from 1 to Z2-1 do Is[i]:=Ik[i]-Ik[i+1]: end do:#Токи в стержнях
> Is[Z2]:=Ik[Z2]-Ik[1]:
> A[ic2] := [[Re(Is[n]),Im(Is[n])] $n=1..Z2]:
Има:= [[n,sqrt(Re(Is[n])^2+Im(Is[n])^2)] $n=1..Z2]:#Амплитуды токов стержней
> S:=sum(Има[n],n=1..Z2)/Z2:#Среднее значение амплитуды тока клетки
plot(A[ic2],style=point,symbol=cross,color=black,scaling=constrained,title="Токи несимметричной клетки");#Векторы токов в стержнях на комплексной плоскости. Повреждение 19-го стержня
```

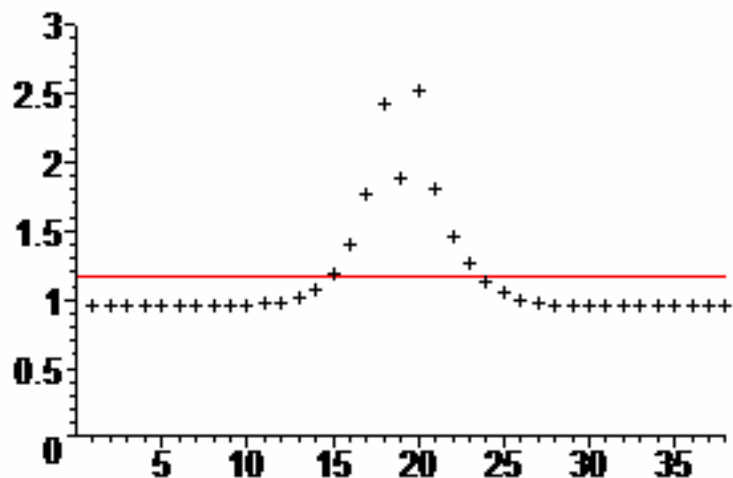
Токи несимметричной клетки



>

```
plot([I_max,S[2]],0..Z2,style=[point,line],symbol=cross,color=[black,red],view=[0..Z2, 0..3],title="Амплитуды токов несимметричной клетки");#Амплитуды токов в стержнях клетки. Повреждение 19-го стержня
```

Амплитуды токов несимметричной клетки



Сплошной линией на графике показано среднее значение амплитуды тока в стержнях клетки. В данном случае диагностическими факторами могут быть не только величина тока ротора, возросшая в среднем на 16%, но и поочерёдные пульсации фазных токов статора, достигающие 2,5 номинальных значений.

СОДЕРЖАНИЕ

	ПРЕДИСЛОВИЕ	3
	ВВЕДЕНИЕ	4
1	ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ	7
1.1	Линейные пространства, базис, линейные операторы	7
1.2	Матрицы. Типы и свойства матриц	17
1.3	Собственные свойства матриц	20
1.4	Квадратичные формы и канонические преобразования координат	22
1.5	Контрольные вопросы	32
2	ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	35
2.1	Определение и основные свойства математических моделей	35
2.2	Ограниченность и иерархичность математических моделей	37
2.3	Математическая модель как инструмент совершенствования электрических машин	40
2.4	Параметрические модели и их обоснование	41
2.5	Электрическая машина как линейный оператор	43
2.6	Контрольные вопросы	46
3	ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ СОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБМОТОК	47
3.1	Общие положения	47
3.2	Матрицы параметров рассеяния	48
3.3	Главные матрицы собственных индуктивностей	49
3.4	Контрольные вопросы	64
4	ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОБМОТКАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН	65
4.1	Общие положения	65
4.2	Продольный и поперечный энергетические процессы	66
4.3	Особые токи в обмотках	69
4.4	Баланс мощности обмотки и каноническое преобразование координат квадратичной формы главной мощности	70
4.5	Продольный и поперечный токи. Эффективное собственное число	72
4.6	Структура потоков главной мощности обмотки	73
4.7	Энергетические аспекты канонических преобразований координат	75
4.8	Связь канонических и классических преобразований координат	76
4.9	Матричные аспекты моделирования клеток короткозамкнутых роторов	82
4.10	Контрольные вопросы	92
5	МАТРИЦЫ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ.....	93
5.1	Общие положения	93
5.2	Матрица взаимной индукции	94

5.3	Квадратичная форма электромагнитной мощности статора	96
5.4	Квадратичная форма механической мощности	98
5.5	Параметрическая матрица электрической машины	99
5.6	Параметрическая анизотропия векторного пространства электрической машины	103
5.7	Концепция рационального питания электрической машины	104
5.8	Контрольные вопросы	107
6	ВИЗУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ МОЩНОСТИ МНОГОФАЗНЫХ ОБМОТОК	108
6.1	Минимизация мощности рассеяния обмотки	108
6.2	Характерные примеры	111
6.3	Визуальные модели продольного и поперечного подмножеств ..	117
6.4	Контрольные вопросы	122
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	125
A	ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ К ЗАДАЧАМ ДИАГНОСТИКИ АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ	129
A.1	Общие положения	129
A.2	Моделирование повреждения обмотки статора	130
A.3	Моделирование повреждения короткозамкнутой клетки ротора	134

Учебное издание

Денисов Валерий Николаевич
Курилин Сергей Павлович

МАТРИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Учебное пособие

Технический редактор **Х.Х. Хxxxxxxxx**
Корректор **Х.Х. Хxxxxxxxxxxx**

Темплан издания филиала ГОУВПО "МЭИ (ТУ)" в г. Смоленске, 2011 г., учебн.
Подписано в печать **ХХ.ХХ.2011** г.
Формат **ххххх**. Тираж 70 экз. Печ.л. **ххх**. Усл. печ. л. **ххх**.

Издательский сектор филиала ГОУВПО "МЭИ (ТУ)" в г. Смоленске
214013 г. Смоленск, Энергетический проезд,1