Интегрирование функций.Геометрические приложения определенного интеграла

Оглавление

Цель работы 1

Интегрирование функции одной переменной 1

Приложения определенного интеграла 2

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат 2

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в параметрическом виде 5

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в полярных координатах 9

Вычисление длины дуги плоской кривой 14

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в параметрической форме 17

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах 19

Вычисление объема тела 20

Контрольные вопросы 23

Контрольные задания 24

Цель работы

Целью работыявляется освоить технологию интегрирования функций в программе Maple.

Интегрирование функции одной переменной

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ вычисляется с помощью 2-х команд:

1) прямого исполнения – *int(f, x),* где f – подынтегральная функция, **x** – переменная интегрирования;

2) отложенного исполнения – *Int(f, x)* – где параметры команды такие же, как и в команде прямого исполнения *int*. Команда *Int* выдает на экран интеграл в аналитическом виде математической формулы.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в командах *int* и *Int* добавляются пределы интегрирования, например,

>Int((1+cos(x))^2, x=0..Pi)=int((1+cos(x))^2, x=0..Pi);

$$\int_0^{\pi}(1+\cos(x))^2 dx = \frac{3}{2}\pi$$

Если в команде интегрирования добавить опцию *continuous: int(f, x, continuous)*, то *Maple* будет игнорировать любые возможные разрывы подынтегральной функции в диапазоне интегрирования. Это позволяет вычислять несобственные интегралы от неограниченных функций. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования вычисляются, если в параметрах команды *int* указывать, например, *x=0..+infinity.*

Если требуется вычислить интеграл, зависящий от параметра, то его значение может зависеть от знака этого параметра или каких-либо других ограничений. Рассмотрим в качестве примера интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$, который, как известно из математического анализа, сходится при $a>0$ и расходится при $a<0$. Если вычислить его сразу, то получится:

*>Int(exp(-a*x),x=0..+infinity)=int(exp(-a*x),x=0..+infinity);*

$$\int_0^{\infty} e^{-a\,x}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{e^{-a\,x}-1}{a}\right)$$

Для получения явного аналитического результата вычислений следует сделать какие-либо предположения о значении параметров, то есть наложить на них ограничения. Это можно сделать при помощи команды *assume(expr1,expr2,…)*, где *expr1, expr2, …* – неравенства, равенства.

Вернемся к вычислению интеграла с параметром $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$, которое следует производить в таком порядке:

>assume(a>0);

*>Int(exp(-a*x),x=0..+infinity)=int(exp(-a*x),x=0..+infinity);*

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a\sim x)}dx = \frac{1}{a\sim}$$

Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

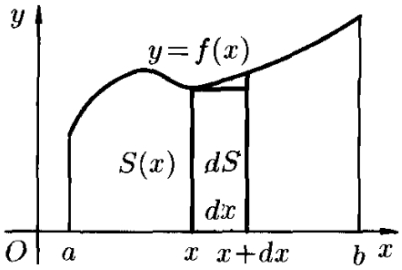


Рис.1

Площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс $(f(x) \geq 0)$, равна соответствующему определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \text{ или } S = \int_a^b y\,dx. \tag{1}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями $y = f(x) \geq 0$ $x = b; x = a\,; y = 0$. Для нахождения площади S этой трапеции проделаем следующие операции:

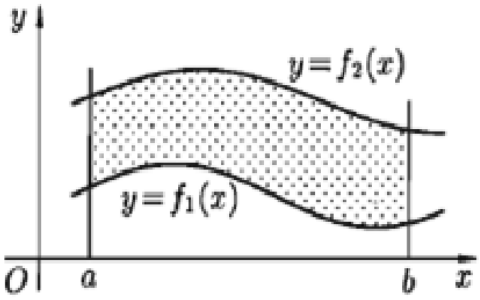


Рис. 2

1. Возьмем произвольное $x \in [a; b]$ и будем считать, что $S = S(x)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx (x + \Delta x \in [a; b])$ Функция $S = S(x)$. получит приращение ΔS, представляющее собой площадь «элементарной криволинейной трапеции» (на рисунке она выделена).

Дифференциал площади dS есть главная часть приращения ΔS при $\Delta x \to 0$ и, очевидно, он равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y: $dS = ydx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем $S = \int_a^b y\,dx$.

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox ($f(x) < 0$), то ее площадь может быть найдена по формуле

$$S = -\int_a^b ydx. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |y| dx. \quad (3)$$

Пример №1.

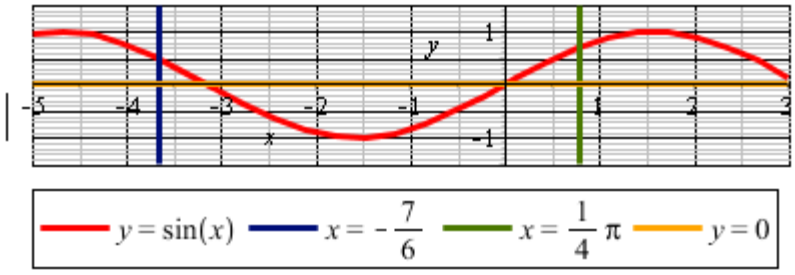
Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin(x)$, прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

> $y = \sin(x), x = -\frac{7}{6}\pi, x = \frac{\pi}{4}, y = 0$

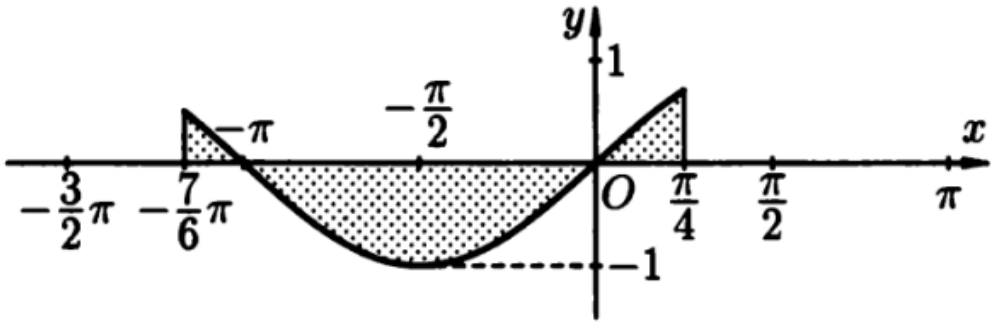
$$y = \sin(x), x = -\frac{7}{6}\pi, x = \frac{1}{4}\pi, y = 0 \quad (1.1)$$

>

plots[:-*display*](*plots*[:-*implicitplot*](y = sin(x), x = −5 .. 3, y = −1.5 .. 1.5), *plots*[:-*implicitplot*](x = −7/6*π, x = −5 .. 3, y = −1.5 .. 1.5, *color* = "Niagara Navy"), *plots*[:-*implicitplot*](x = 1/4*π, x = −5 .. 3, y = −1.5 .. 1.5, *color* = "Niagara LeafGreen"), *plots*[:-*implicitplot*](y = 0, x = −5 .. 3, y = −1.5 .. 1.5, *color* = "Niagara Azure"))



>



Воспользуемся фориулой (3):

> $\int_{-\frac{7}{6}\cdot\pi}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(x)|\, dx$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4 \qquad (1.2)$$

> $evalf(\%)$

$$2.426867815 \qquad (1.3)$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4$

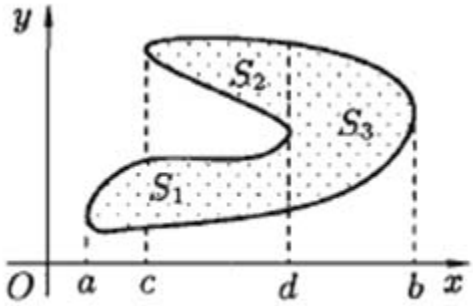


Рис.3

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$; $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$) (см. рис.2), можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (4)$$

Если плоская фигура имеет «сложную» форму (см. рисунок 3), то прямыми, параллельными оси Oy, ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geq 0$, то ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b \varphi(y)\, dy\,. \qquad (5)$$

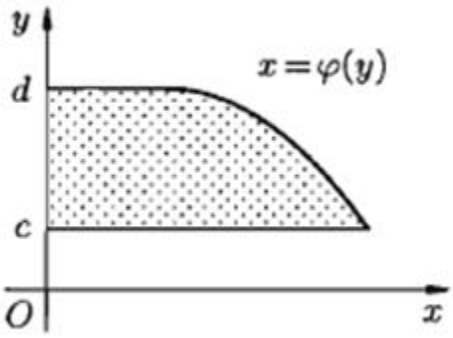


Рис.4

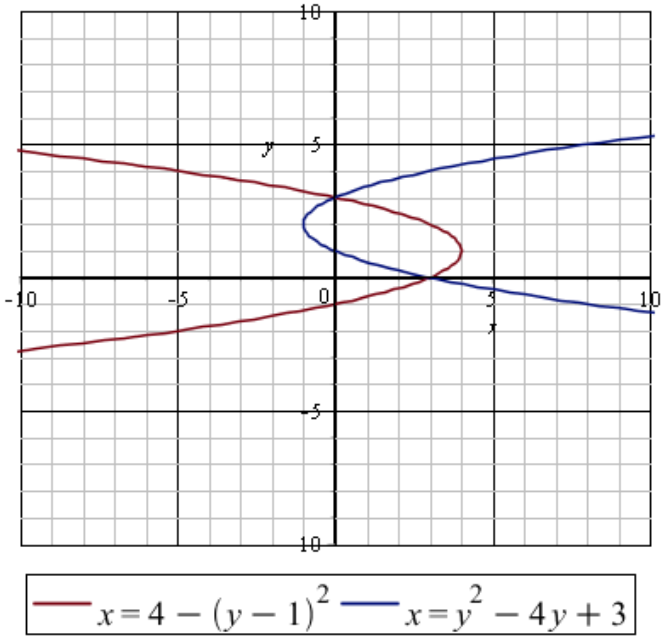
Пример №2.

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций $y = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3$.

> $x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3$

$$x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3 \quad (1.1)$$

> $smartplot[x, y]([\ (1.1)\ ])$



Воспользуемся формулами (4) и (5). Правая граница, полученной фигуры - $x = 4 - (y-1)^2$, левая граница - $x = y^2 - 4y + 3$. y в данном примере выступает в качестве аргумента, x - функция. y изменяется в пределах от 0 до 3.

> $\int_0^3 4 - (y-1)^2 - (y^2 - 4y + 3)\,dy$

$$9 \quad (1.2)$$

Ответ:9.

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в параметрическом виде

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром. Функция $x = x(t)$ монотонна, на всем допустимом множестве параметра t.

Пусть криволинейная трапеция ограничена **кривой, заданной параметрически**

$$\{x = x(t)\ \ y = y(t)\ t \in [\alpha; \beta]$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, тогда площадь ее находится по формуле

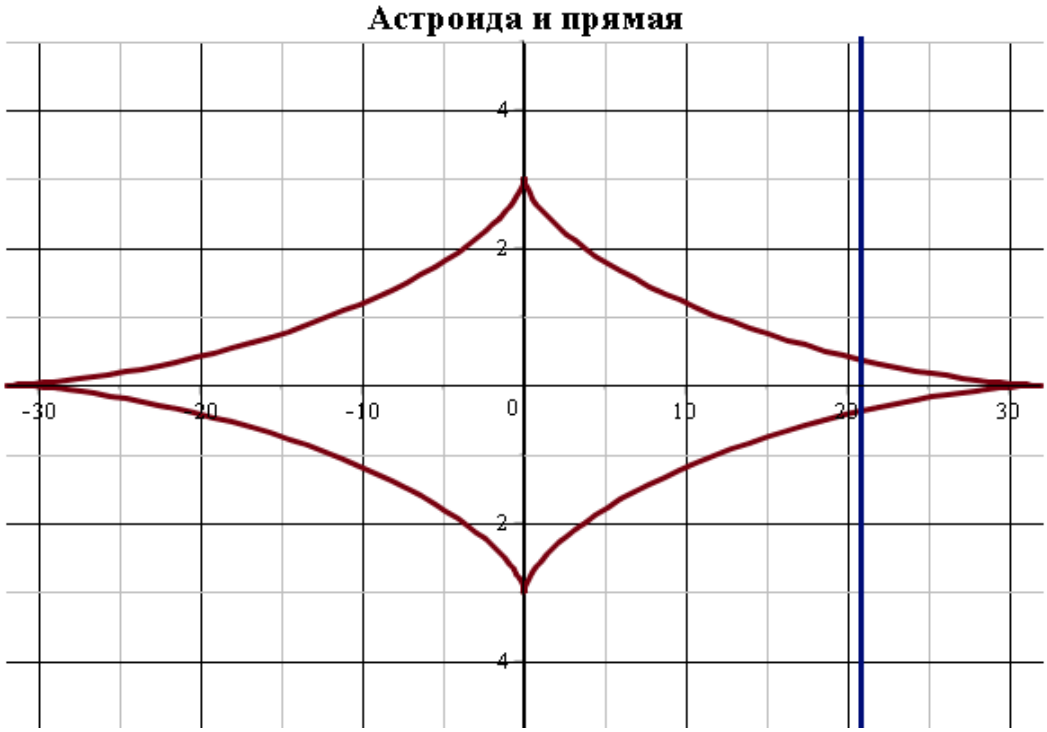
$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\ dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

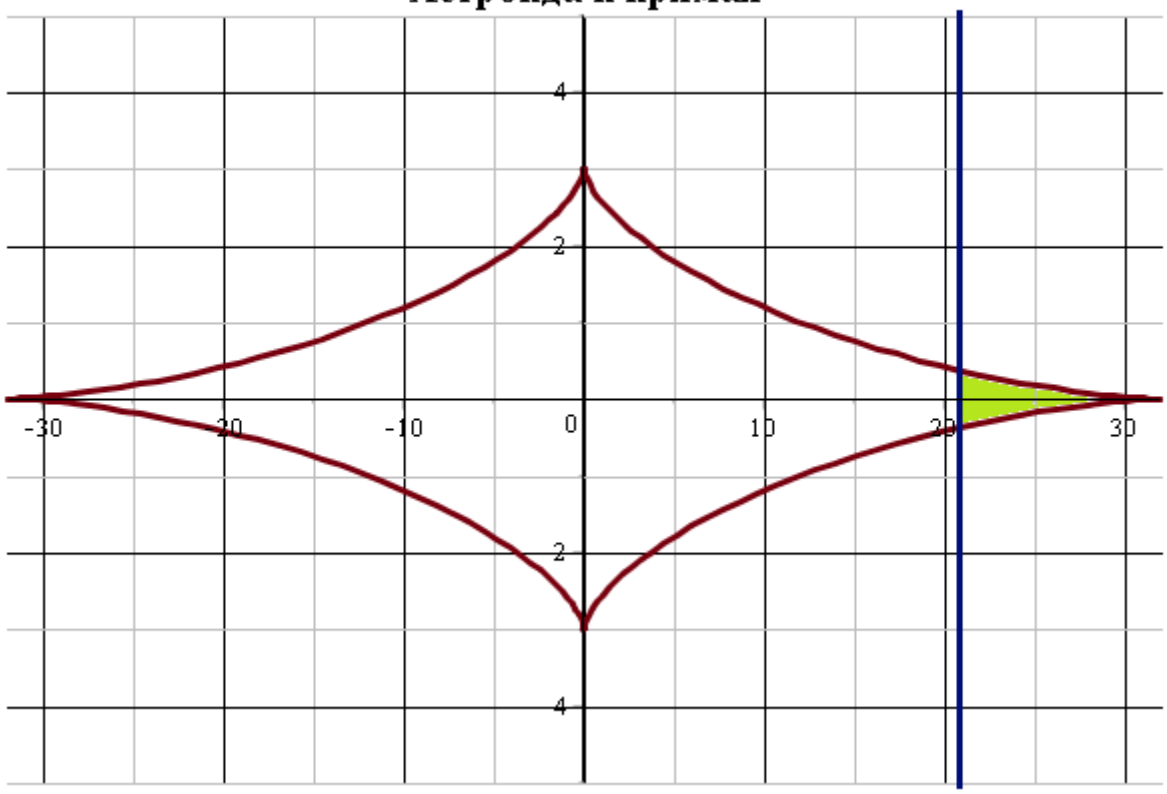
Пример №3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными уравнениями $x = 32\cdot(\cos(t))^3$, $y = 3(\sin(t))^3$, $x = 12\sqrt{3}$ $(x \geq 12\sqrt{3})$.

```
> restart
> plot([[32·(cos(t))^3, 3·(sin(t))^3, t=-π..π], [12·√3, t, t=-30..30]])
```



Астроида и прямая



Определим значения параметра t, при которых график удовлетворяет условию $x \geq 12\sqrt{3}$.

> $32\cdot(\cos(t))^3 \geq 12\cdot\sqrt{3}$

$$12\sqrt{3} \leq 32\cos(t)^3 \quad (3.1)$$

> $solve(\{(3.1)\})$

$$\left\{t \leq -\frac{11}{6}\pi, -\frac{13}{6}\pi \leq t\right\}, \left\{t \leq \frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi \leq t\right\}, \left\{t \leq \frac{13}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \leq t\right\} \quad (3.2)$$

Команда solve выдала значения на сегменте [-2π;2π].
Промежутку [-π;π] принадлежит ответ из центральной фигурной скобки - $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.
Воспользуемся симметрией фигуры (найдем половину искомой площади).
Рассмотрим промежуток $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, на котором при возрастании параметра t функция x=x(t) монотонно убывает.

$> \left(32\cdot(\cos(t))^3\right)$

$$32\cos(t)^3 \tag{3.3}$$

$> diff((3.3), t)$

$$-96\cos(t)^2\sin(t) \tag{3.4}$$

Искомая площадь:

$> 2\cdot\left|\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3\cdot(\sin(t))^3\cdot\left(-96\cos(t)^2\sin(t)\right)dt\right|$

$$-9\sqrt{3}+6\pi \tag{3.5}$$

$> evalf(\%)$

$$4.89164798 \tag{3.6}$$

Ответ: $-9\sqrt{3}+6\pi$

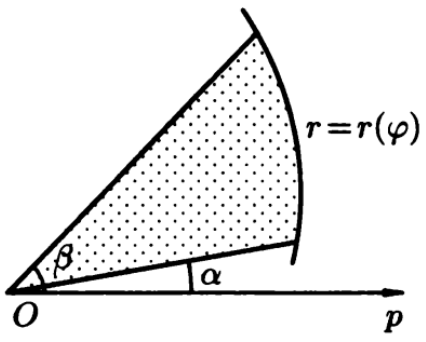


Рис. 5

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в полярных координатах

Площадь S криволинейного сектора, ограниченного непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, где r, φ – **полярные координаты**:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример №3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полрных координатах $r = 6\cdot\sin(\varphi)$, $r = 4\cdot\sin(\varphi)$.

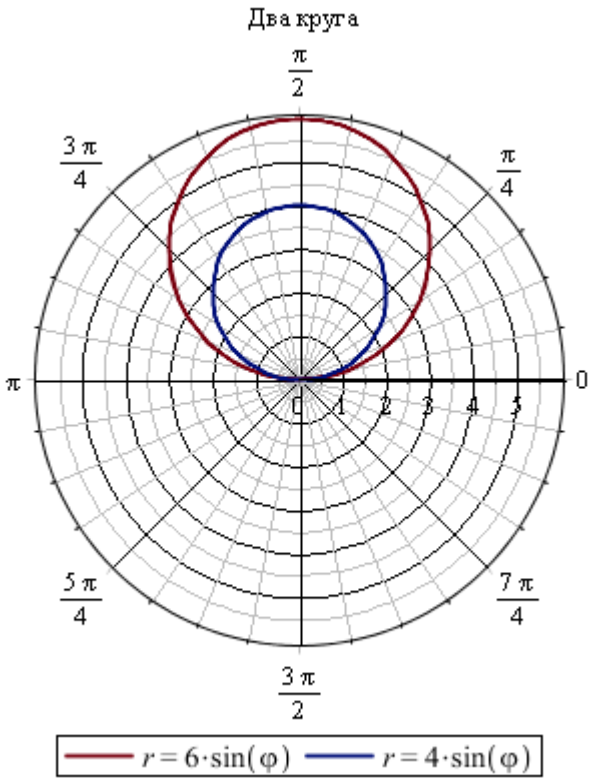
> *restart*

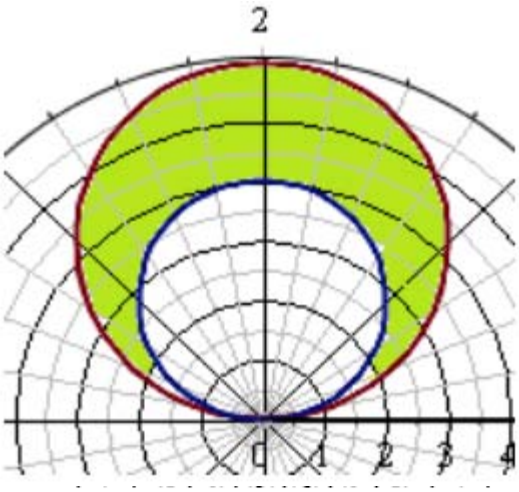
> $r = 6\cdot\sin(\varphi),\ r = 4\cdot\sin(\varphi)$

$$r = 6\sin(\varphi),\ r = 4\sin(\varphi) \tag{4.1}$$

> *with*(*plots*) :

> *polarplot*([[$6\cdot\sin(\varphi)$, φ, $\varphi = -\pi..\pi$], [$4\cdot\sin(\varphi)$, φ, $\varphi = -\pi..\pi$]], *numpoints* = 50)





Найдем площадь "большого круга":

$$> \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}(6\cdot\sin(\varphi))^2\,d\varphi$$

$$9\pi \qquad (4.2)$$

Найдем площадь "малого круга":

$$> \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}(4\cdot\sin(\varphi))^2\,d\varphi$$

$$4\pi \qquad (4.3)$$

Найдем разность найденных величин:

$$> 9\pi - 4\pi$$

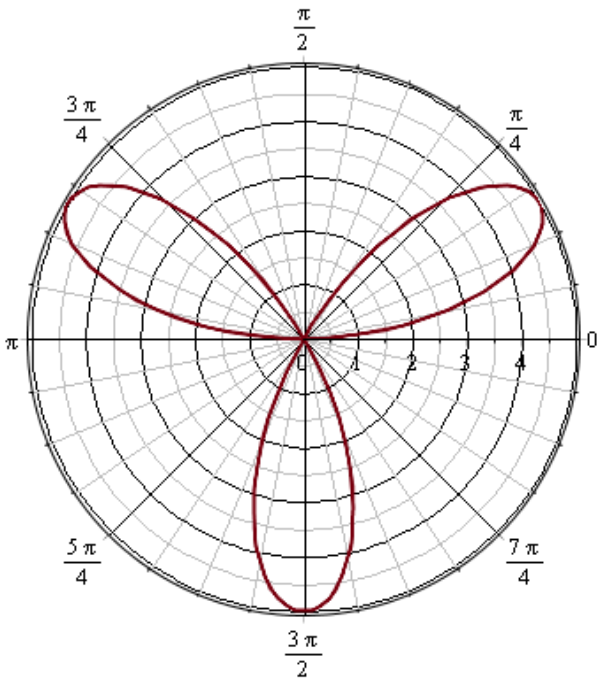
$$5\pi \qquad (4.4)$$

Ответ: 5π .

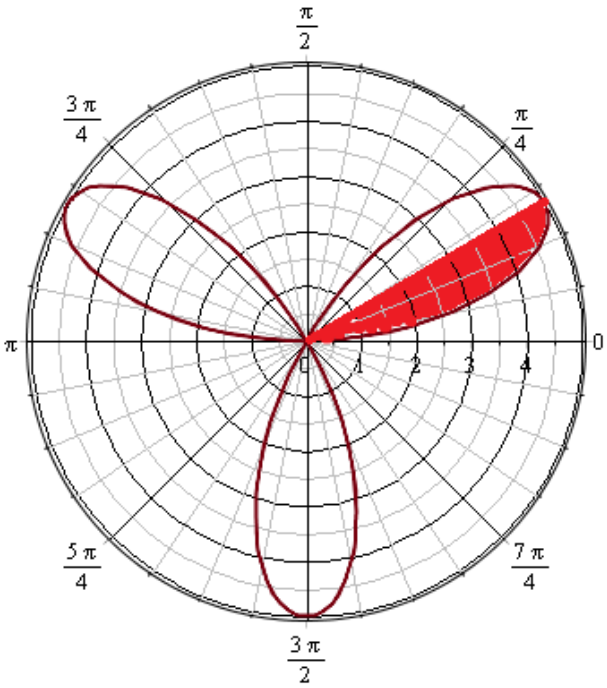
Пример №4.

Найти площадь фигуры, ограниченной "трехлепестковой розой" $r = 5\cdot\sin(3\cdot\varphi)$.

```
> restart
> with(plots) :
> polarplot([5·sin(3·φ), φ, φ =-π..π], numpoints = 50)
```



Найдем изменения параметра φ для половины первого лепестка:



$> 5\cdot \sin(3\cdot\varphi) = 5$

$$5\sin(3\varphi) = 5 \tag{5.1}$$

$> solve(\{(5.1)\}, AllSolutions = true)$

$$\left\{\varphi = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi_Z14\sim\right\} \tag{5.2}$$

Угол φ меняется от нуля до $\frac{\pi}{6}$.

Найдем площадь половины лепестка, а потом ее умножим на шесть.

$> \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} (5\cdot\sin(3\cdot\varphi))^2 d\varphi$

$$\frac{25}{24}\pi \tag{5.3}$$

$> 6\cdot\frac{25}{24}\pi$

$$\frac{25}{4}\pi \tag{5.4}$$

Ответ: $\frac{25}{4}\pi$.

Пример 5.

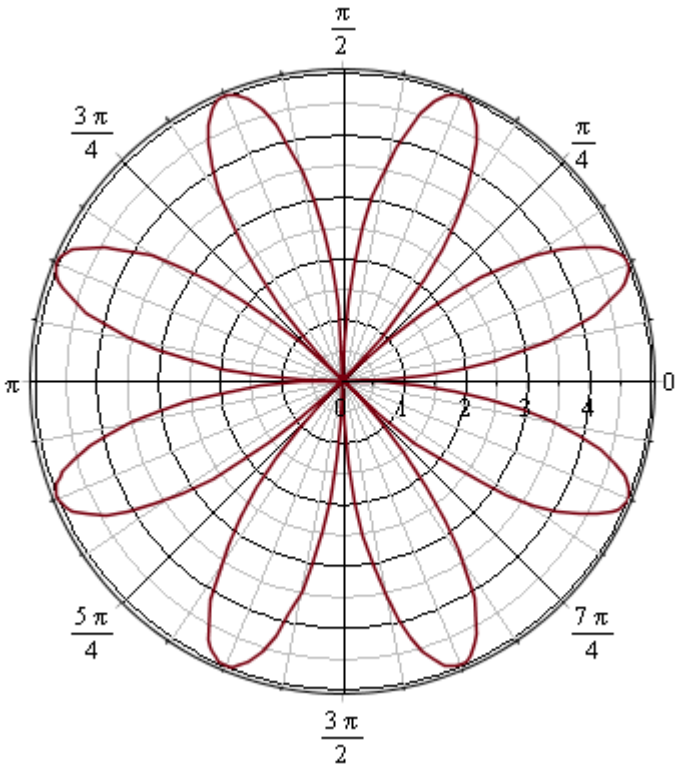
Хотелось бы отметить некоторые особенности работы с программой Maple, в случае с четным числом лепестков.

Найти площадь фигуры, ограниченной "четырехлепестковой розой" $r = 5\cdot\sin(4\cdot\varphi)$.

$> restart$

$> with(plots):$

$> polarplot([5\cdot\sin(4\cdot\varphi), \varphi, \varphi = -\pi..\pi], numpoints = 50)$

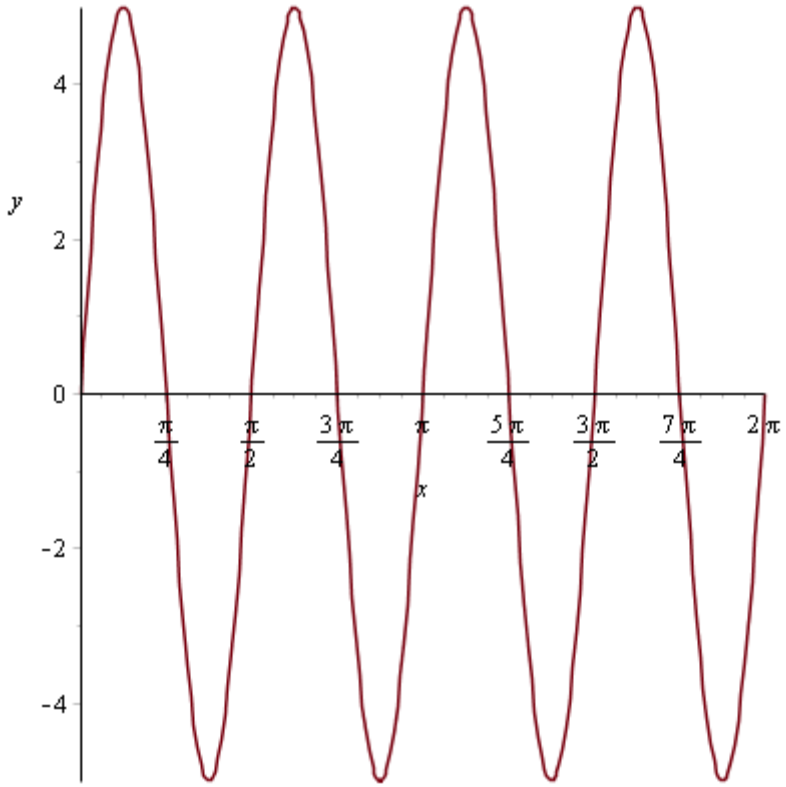


Программа дает изображение "лишних" лепестков, соответствующих r<0.

> $y = 5 \cdot \sin(4 \cdot x)$

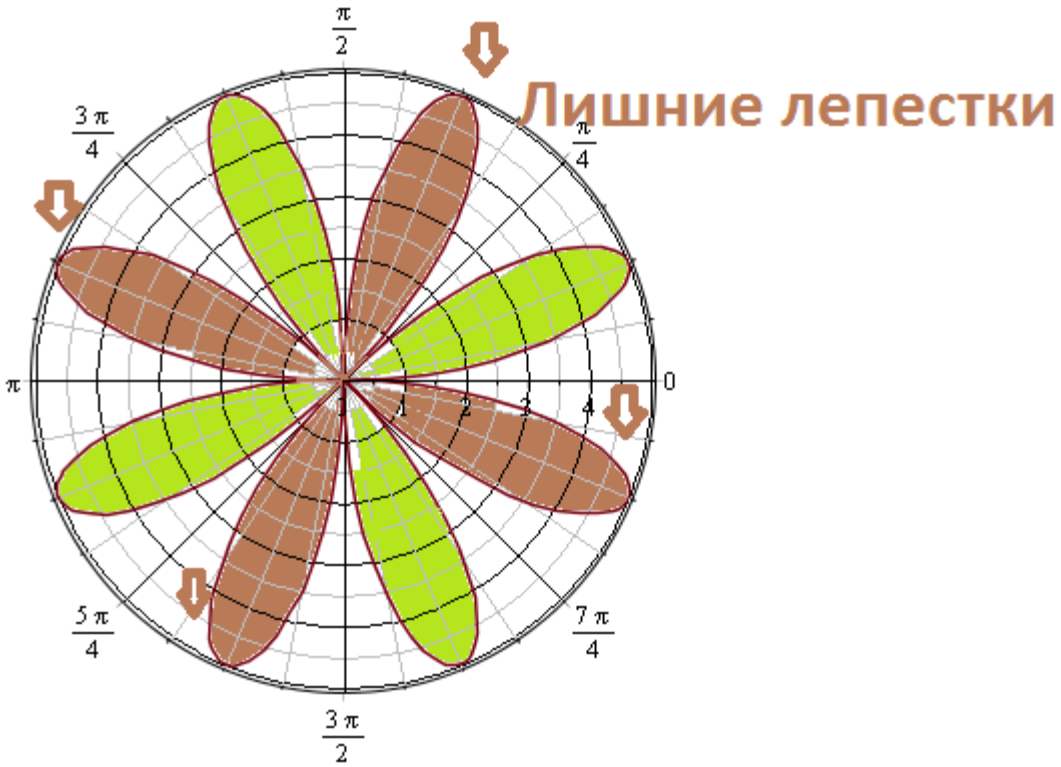
$$y = 5\sin(4x) \quad \textbf{(6.1)}$$

> *smartplot*[*x*, *y*](**(6.1)**)



Значит, "лишние" лепестки в диапазонах

$$\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{3\cdot\pi}{4};\pi\right),\left(\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{7\cdot\pi}{4};2\pi\right).$$



Найдем площадь половины первого лепестка, а потом ее умножим на восемь.

$$> \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{8}} (5\cdot\sin(4\cdot\varphi))^2 d\varphi$$

$$\frac{25}{32}\pi \qquad (6.2)$$

$$> 8\cdot\frac{25}{32}\pi$$

$$\frac{25}{4}\pi \qquad (6.3)$$

Ответ: $\frac{25}{4}\pi$.

Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$, где $a \le x \le b$

Поддлиннойдуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Применим метод сумм.

1. Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$ разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей . Пусть этим точкам соответствуют точки$M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$ на кривой AB. Проведем хорды $M_0M_1M_1, M_2 \dots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через$\Delta L_1 \Delta L_2 \dots, \Delta L_n$. Получим ломаную$M_0M_1M_1, M_2 \dots, M_{n-1}M_n$, n длина которой равна $L_n = \Delta L_1 + \dots, + \Delta L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$.

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i)\Delta x_i$ где $\Delta c_i \in (x_i; x_{i-1})$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i,$$

а длина всей ломаной M_1 , $M_2 \dots, M_n$равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i.$$

3. Длина кривой AB, по определению, равна

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} L_n = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i.$$

Заметим, что при$\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$ $(\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$). Функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы , когда $\max \Delta x_i \to 0$

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Таким образом, $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, или в сокращенной записи $\int_a^b \sqrt{1 + (y_x^{/})^2}\, dx$.

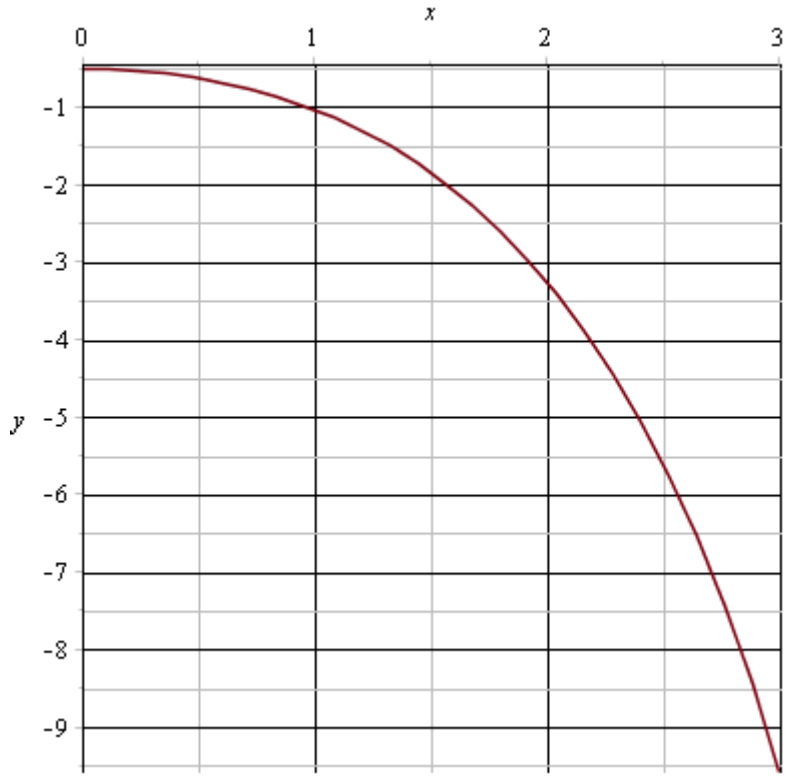
Пример №6.

Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат $y = \frac{1 - e^{x} - e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 3$.

> $y = \frac{1 - e^{x} - e^{-x}}{2}$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x} \tag{7.1}$$

> $plots[:\text{-}implicitplot]((7.1), x = 0 .. 3, y = -10 .. 5)$



> $\frac{1-e^{x}-e^{-x}}{2}$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x} \tag{7.2}$$

> $diff((7.2), x)$

$$-\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x} \tag{7.3}$$

> $\int_{0}^{3}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)^{2}}\,dx$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{e^{6}+2+e^{-6}}\,(e^{6}-1)}{e^{6}+1} \tag{7.4}$$

> $simplify(\ (7.4)\ )$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{e^{12}+2\,e^{6}+1}\;e^{-3}\,(e^{6}-1)}{e^{6}+1} \tag{7.5}$$

> $evalf(\%)$

$$10.01787492 \tag{7.6}$$

Видим, что программа Maple не смогла достойным образом упростить выражение. Выполним упрощение самостоятельно. Воспользуемся формулой квадрата суммы, тогда

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(e^{6}+1)^{2}}\;e^{-3}\,(e^{6}-1)}{e^{6}+1}=\frac{1}{2}\,\frac{(e^{6}+1)\,e^{-3}\,(e^{6}-1)}{e^{6}+1}=\frac{e^{-3}\,(e^{6}-1)}{2}$$

$$=\frac{e^{3}-e^{-3}}{2}=sh(3).$$

Ответ:sh(3).

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в параметрической форме

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме $x = x(t), y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$ где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a;\ b = x(\beta)$, то длина l кривой AB находится по формуле

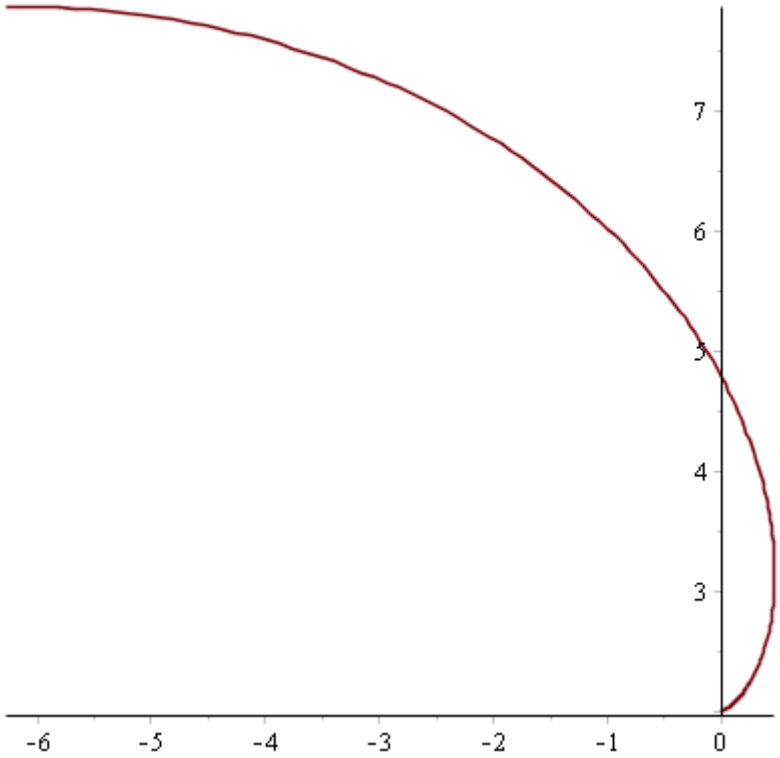
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\Delta x'(t))^2 + (\Delta y'(t))^2}\, dx.$$

Пример №7.

Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2)\cdot\sin(t) + 2\cdot t\cdot\cos(t)$ $y = (2 - t^2)\cdot\cos(t) + 2\cdot t\cdot\sin(t)$, $0 \le t \le \pi$.

> *restart*

> $plot([(t^2 - 2)\cdot\sin(t) + 2\cdot t\cdot\cos(t), (2 - t^2)\cdot\cos(t) + 2\cdot t\cdot\sin(t), t = 0..\pi])$



> $(t^2 - 2)\cdot\sin(t) + 2\cdot t\cdot\cos(t)$

$$(t^2 - 2)\sin(t) + 2\,t\cos(t) \tag{8.1}$$

> $diff((8.1), t)$

$$(t^2 - 2)\cos(t) + 2\cos(t) \tag{8.2}$$

> $simplify((8.2))$

$$\cos(t)\,t^2 \tag{8.3}$$

> $(2 - t^2)\cdot\cos(t) + 2\cdot t\cdot\sin(t)$

$$(-t^2 + 2)\cos(t) + 2\,t\sin(t) \tag{8.4}$$

> $diff((8.4), t)$

$$-(-t^2 + 2)\sin(t) + 2\sin(t) \tag{8.5}$$

> $simplify((8.5))$

$$\sin(t)\,t^2 \tag{8.6}$$

$$> \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\cos(t)\, t^2\right)^2 + \left(\sin(t)\, t^2\right)^2}\, dt$$

$$\frac{1}{3}\pi^3 \tag{8.7}$$

$$> evalf(\%)$$

$$10.33542556 \tag{8.8}$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi^3$.

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах

Путь кривая заданав полярных координатах$r = r(\varphi)$идвумя лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, где r, φ – **полярные координаты**. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ - непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда длина кривой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

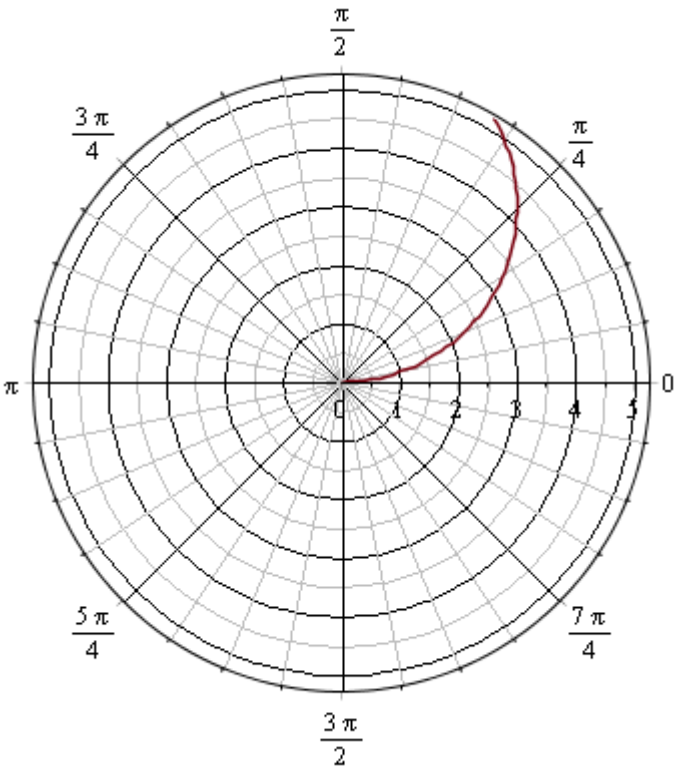
Пример №6.

Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах$\rho = 6\sin(\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

```
> restart
> ρ = 6 sin(φ)
```

$$\rho = 6\sin(\varphi) \tag{9.1}$$

```
> with(plots) :
> polarplot([6·sin(φ), φ, φ = 0..π/3], numpoints = 50)
```



> $6\cdot\sin(\varphi)$

$$6\sin(\varphi) \tag{9.2}$$

> *diff*((9.2), `φ`)

$$6\cos(\varphi) \tag{9.3}$$

> $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(6\cdot\sin(\varphi))^2 + (6\cos(\varphi))^2}\, d\varphi$

$$2\pi \tag{9.4}$$

Ответ:2π.

Вычисление объема тела

По известным площадям параллельных сечений.

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S = S(x), a \leq x \leq b$.

Применим схему.

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox . Обозначим через $S(x)$ площадь сечения тела этой плоскостью; $S(x)$ считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x. Через $v(x)$ обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости П. Будем считать, что на отрезке $[a; x]$ величина v есть функция от x , т. е. $v = v(x)$ $(v(a) = 0, v(b) = V)$.

2. Находим дифференциал dV функции $v = v(x)$. Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x + \Delta x$, который приближенно может быть принят

за цилиндр с основанием $S(x)$ и высотой dx. Поэтому дифференциал объема $dV = S(x)\,dx$.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до b

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Полученная формула называется формулой объема тела по площади параллельных сечений.

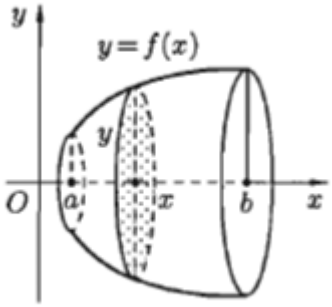
Объем тела вращения

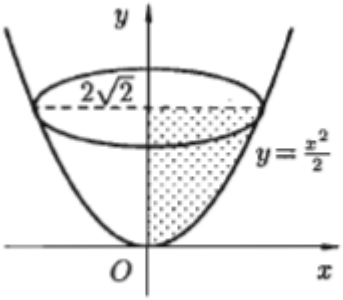
Пусть вокруг оси Ох вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geq 0$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ Полученная от вращения фигура называется телом вращения. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ох, проведенной через произвольную точку x оси Ох ($x \in [a; b]$), есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$. Применяя формулу объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной Функции. $x = \varphi(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0; y = c; y = d; (c < d)$ то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Оу, по аналогии с формулой

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy.$$





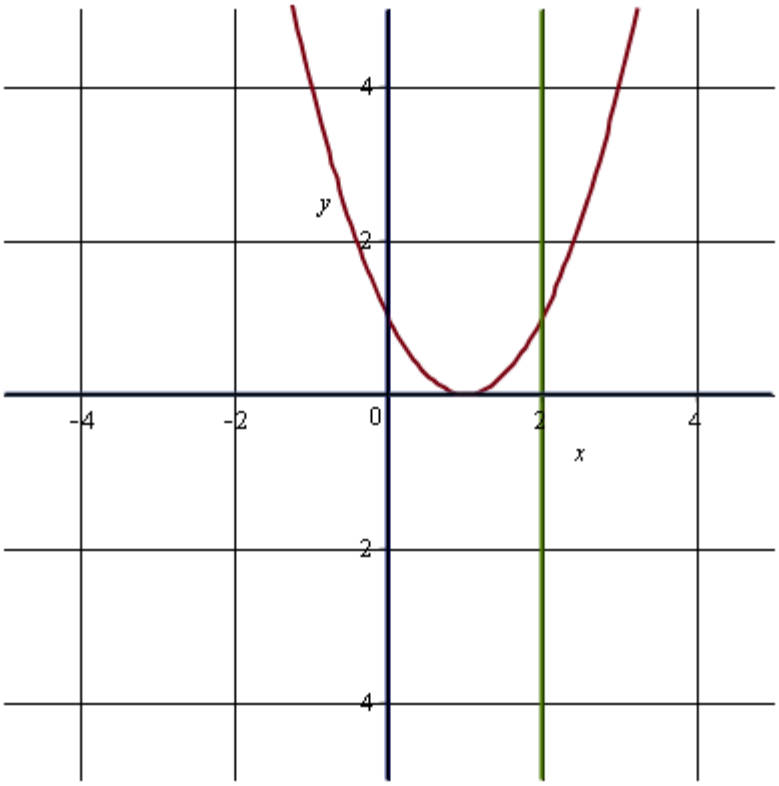
Пример №7.

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$. А) Ось вращения Оу. Б) Ось вращения Ох.

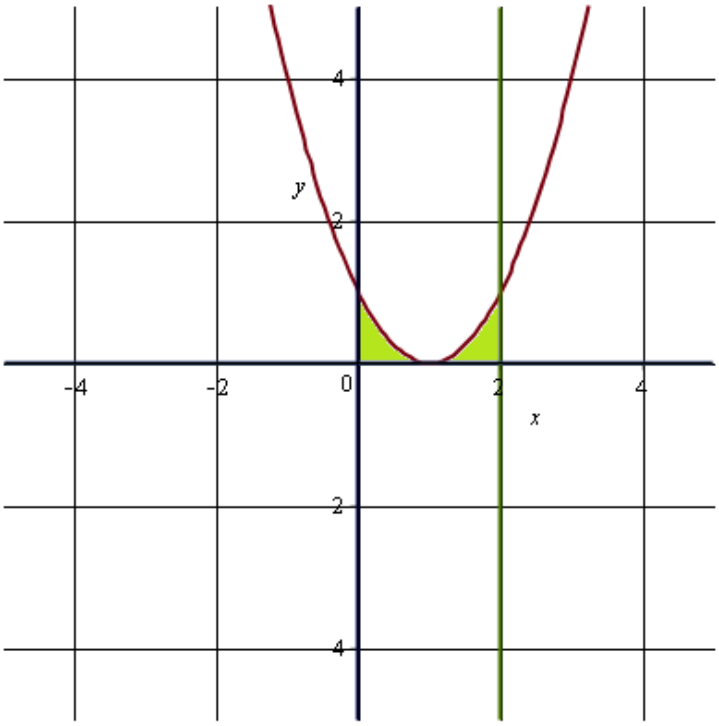
```
> restart
> y = (x - 1)^2, x = 0 , x = 2, y = 0
```

$$y = (x-1)^2,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0 \qquad (10.1)$$

```
> smartplot[x, y]([ (10.1) ])
```



Значит, плоская фигура, которую подвергают вращению выглядит так:



А)Сначала, найдем объем цилиндра.

$$> \pi \cdot \int_0^1 (2)^2 \, dy$$

$$4\pi \tag{10.2}$$

Найдем объем параболида

$$> \pi \cdot \int_0^1 (\sqrt{y} + 1)^2 \, dy - \pi \cdot \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 \, dy$$

$$\frac{8}{3}\pi \tag{10.3}$$

Из оъема цилиндра вычтем объем параболоида

$$> 4\pi - \frac{8}{3}\pi$$

$$\frac{4}{3}\pi \tag{10.4}$$

Б)

$$> \pi \cdot \int_0^2 ((x-1)^2)^2 \, dx$$

$$\frac{2}{5}\pi \tag{10.5}$$

Ответ:А $\frac{4}{3}\pi$, Б $\frac{2}{5}\pi$

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры ограниченной графиком функции$y = y(x)$, прямыми$x = a$, $x = b$,осьюOx?
2. Как вычислить площадь фигуры ограниченной графиками функций$y = y_1(x)$и$y = y_2(x)$ соответствующими отрезками прямых$x=a$ и $x=b$?
3. Назовите формулы вычисления площадей фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически.
4. Как вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах?
5. Назовите формулу объёма тела, образованного вращением вокруг осиOxфигуры, ограниченной графиком функции $y=y(x)$, отрезками прямых$x=a$ и $x=b$ и отрезком оси Ox.
6. Назовите формулу объёма тела, образованного вращением вокруг оси Oyфигуры, ограниченной графиком функции $x=x(y)$, отрезками прямых$y=a$ и $y=b$ и отрезком оси Oy.

Контрольные задания

1. Оформите титульный лист к лабораторной работе, согласно требованиям СФМЭИ (ТУ). Укажите название лабораторной работы.Фамилию, Имя, группу, номер студента в журнале (см. Приложение 1).
2. Создайте документ Maple. Напишите заголовок 14 кеглем, полужирно, с выравниванием по центру: «Лабораторная работа №1». Далее с выравниванием по правому краю, курсивом, 14 кеглем укажите полностью Фамилию, Имя, номер в журнале.
3. Выполните задания из своего варианта, определяемого номером в журнале. Каждое задание должно быть оформлено в отдельной секции (пиктограммы) с заголовком «Задание №_». Завершать секцию должен развернутый ответ.
4. Распечатайте лабораторную работу из под программы Maple на листах формата А4 (односторонняя печать).

При выполнении контрольных заданий студенту необходимо подставить вместо буквенных параметров индивидуальные анкетные характеристики:

c - номер студента по списку в журнале

a – число букв в имени

b – число букв в фамилии

На титульном листе необходимо <u>обязательно</u> указать, какие анкетные данные использовались при выполнении контрольных заданий (имя, фамилия, номер варианта). И продублировать эти же данные на первой странице самого отчета.

Все рисунки должны иметь заголовок, номер, оси.Рисунки, на которых приведены несколько функций, должны иметь легенду. Графики не должны быть угловатыми.

1. Найти неопределенный интеграл функции

№1-10:

$$f(x) = ln^c(x)$$

№11-20:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(x + c)$$

№21-30

$$f(x) = \frac{1}{a + cx^2}$$

2. Вычислить интегралы

а) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(cx)\, dx,$ б) $\int_1^c \frac{xdx}{(a + bx)^2}$

3.Найти интегралы в заданиях №1-№10 из четвертого раздела «Интегралы» сборника заданий по высшей математике Кузнецова Л.А. Номер варианта выбирается в соответствии с номером студента в журнале.

4. Выполнить задания №14-№19, №21 из четвертого раздела «Интегралы» сборника заданий по высшей математике Кузнецова Л.А. Номер варианта выбирается в соответствии с номером студента в журнале.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения Высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ» в г. Смоленске

Кафедра

Высшей математики

Лабораторная работа №8
по дисциплине «Математика»

Вариант (указать номер по журналу)

Количество букв в имени, фамилии

Интегралы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Приложения определенных интегралов

14	15	16	17	18	19	21

Студент группы ЭО-00 Иванов Александр

Преподаватель Винокурова А.С.

Смоленск 2016