МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФИЛИАЛ ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НИУ «МЭИ»
в г. Смоленске.

Денисов В.Н., Выборнова Е.И., Мазалов М.Я

ПРАКТИКУМ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ.

Смоленск 2015.

УДК 517.9 (075.8)
Б 72

Утверждено решением заседания кафедры высшей филиала ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в городе Смоленске в качестве методического пособия для студентов , обучающихся по всем направлениям и специальностям имеющимся в университете.

Подготовлено на кафедре высшей математики

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Курилин С.П..

Денисов В.Н., Выборнова Е.И., Мазалов М.Я. Практикум по вычислительной математике.- Смоленск: , 2015. - 70с.

Практикум содержит основные сведения и образцы выполнения лабораторных работ по курсу вычислительной математики. Приведено достаточное число вариантов и вопросов для защиты лабораторных работ

Лабораторная работа 1

Интерполирование многочленами.

Сформулируем задачу интерполирования.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$

Точки $x_0, x_1, \dots x_n$ будем называть узлами интерполяции. Требуется найти аналитическое выражение $F(x)$ для этой функции так, чтобы

$y_0 = F(x_0), y_1 = F(x_1), y_2 = F(x_2), \dots y_n = F(x_n).$

Геометрически задача интерполирования для функции $y = f(x)$ означает построение кривой, проходящей через точки плоскости с координатами $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$.

Очевидно, что через данные точки можно провести бесчисленное множество различных кривых. Эта задача становится однозначной, если в качестве интерполирующей функции $F(x)$ для $y = f(x)$, заданной $n+1$ своими значениями, выбрать многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$y_0 = P_n(x_0), y_1 = P_n(x_1), y_2 = P_n(x_2), \dots y_n = P_n(x_n).$

Многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий этим условиям, называют интерполяционным полиномом (многочленом), а соответствующие формулы – интерполяционными формулами.

```
> restart:
> with(linalg):with(plots):Digits:=5;
```

Задание 1

Построить интерполяционный полином по определению и записать его в стандартной форме, если функция задана таблично $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ($\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$).

Решение.

Строим матрицу

```
➢ A:=array(1..2,1..5,[[2,3,4,5,6],[1,2,5,3,5]]);
```

$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

По условию интерполяционный полином не выше 4 степени Стандартная форма полинома имеет вид $P_4(x) = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$, где числа a_0, a_1, a_2, a_3, a_4-коэффициенты полинома.

```
> ur:=x->a1*x^4+a2*x^3+a3*x^2+a4*x+a5;
```

$ur := x \to a1\ x^4 + a2\ x^3 + a3\ x^2 + a4\ x + a5$

По определению интерполяционного полинома
$y_0 = P_4(x_0), y_1 = P_4(x_1), y_2 = P_4(x_2), y_3 = P_4(x_3) y_4 = P_4(x_4)$. Составляем систему линейных уравнений.

$$a_1 x_0^4 + a_2 x_0^3 + a_3 x_0^2 + a_4 x_0 + a_5 = y_0$$
$$a_1 x_1^4 + a_2 x_1^3 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 + a_5 = y_1$$
$$a_1 x_2^4 + a_2 x_2^3 + a_3 x_2^2 + a_4 x_2 + a_5 = y_2$$
$$a_1 x_3^4 + a_2 x_3^3 + a_3 x_3^2 + a_4 x_3 + a_5 = y_3$$
$$a_1 x_4^4 + a_2 x_4^3 + a_3 x_4^2 + a_4 x_4 + a_5 = y_4$$

Для получения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 решаем эту систему.

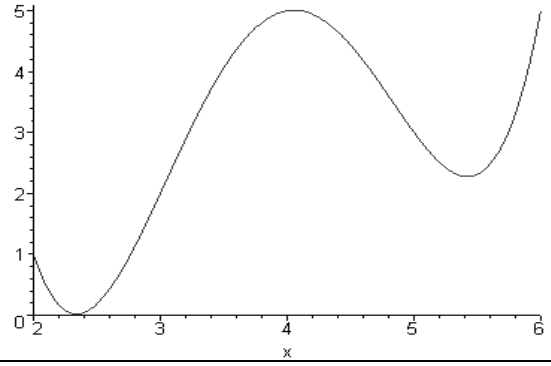
```
>q1:=solve({ur(A[1,1])=A[2,1],ur(A[1,2])=A[2,2],
ur(A[1,3])=A[2,3],ur(A[1,4])=A[2,4],ur(A[1,5])=A[2,5]},
{a1,a2,a3,a4,a5}):assign(q1):
```

Запись многочлена в стандартной форме записи

```
> simplify(ur(x));
```

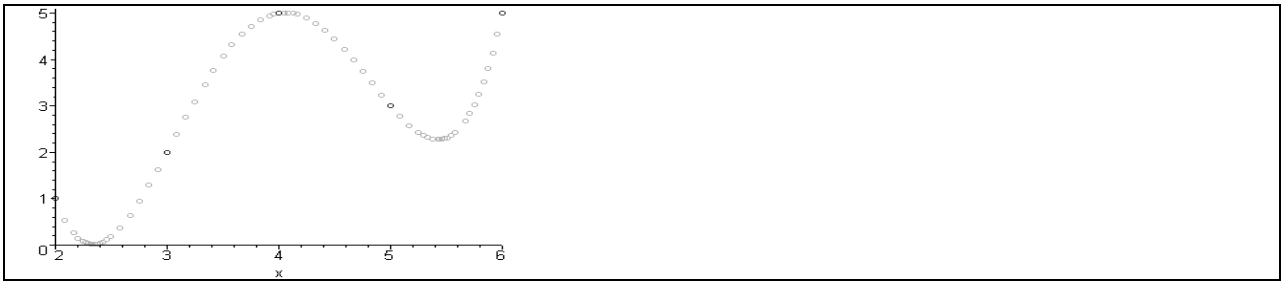
$$\frac{2}{3}x^4 - \frac{21}{2}x^3 + \frac{353}{6}x^2 - 137\,x + 113$$

```
> plot({ur(x)},x=2..6);
```



Построение графика таблично заданной функции (красным-черные кружки) и интерполяционного многочлена(зеленым цветом- светлые кружки).

```
> l := [[ A[1,n], A[2,n]] $n=1..5]:
plot([l,ur(x)],x=2..6,style=point,symbol=circle);
```



Построение интерполяционного многочлена по определению, как мы видим, можно использовать для практического решения задач. Однако на практике используют другие, более удобные способы построения интерполяционного многочлена.

Интерполяционный полином Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$

Обозначим интерполяционный многочлен $P_n(x)$ новым символом $L_n(x)$ Будем искать $L_n(x)$ в виде $L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x)$, где $l_i(x)$ -многочлен степени n, причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_i, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

Исходя из вышесказанного, $l_i(x)$ можно записать следующим образом

$$l_i(x) = y_i \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x_i-x_n)}$$

Окончательно получаем:

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\dots\cdot(x_0-x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot\dots\cdot(x_1-x_n)} + \dots +$$

$$+ y_n \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\dots\cdot(x_0-x_{n-1})}$$

Это и есть интерполяционный полином Лагранжа (развёрнутая запись)

Задание 2.

Построить интерполяционный полином Лагранжа для приведенной выше функции, сравнить его с полиномом в стандартной форме записи и построить графики табличной функции и многочлена.

Решение.

Функцию, заданную в виде таблицы (см. ***задание 1***), можно записать так

```
> x0:=A[1,1]:x1:=A[1,2]:x2:=A[1,3]:x3:=A[1,4]:x4:=A[1,5]:
  y0:=A[2,1]:y1:=A[2,2]:y2:=A[2,3]:y3:=A[2,4]:y4:=A[2,5]:
```

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа

```
> lag:=x->(x-x1)*(x-x2)*(x-x3)*(x-x4)/((x0-x1)*(x0-x2)*(x0-x3)
*(x0-x4))*y0+(x-x0)*(x-x2)*(x-x3)*(x-x4)/((x1-x0)*(x1-x2)*
```

```
(x1-x3)*(x1-x4))*y1+(x-x0)*(x-x1)*(x-x3)*(x-x4)/((x2-x0)*
(x2-x1)*(x2-x3)*(x2-x4))*y2+(x-x0)*(x-x1)*(x-x2)*(x-x4)/
((x3-x0)*(x3-x1)*(x3-x2)*(x3-x4))*y3+(x-x0)*(x-x1)*(x-x2)*
(x-x3)/((x4-x0)*(x4-x1)*(x4-x2)*(x4-x3))*y4;
```

$$lag := x \to \frac{(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)\,y0}{(x0-x1)(x0-x2)(x0-x3)(x0-x4)} + \frac{(x-x0)(x-x2)(x-x3)(x-x4)\,y1}{(x1-x0)(x1-x2)(x1-x3)(x1-x4)} + \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x3)(x-x4)\,y2}{(x2-x0)(x2-x1)(x2-x3)(x2-x4)} + \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x4)\,y3}{(x3-x0)(x3-x1)(x3-x2)(x3-x4)} + \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)\,y4}{(x4-x0)(x4-x1)(x4-x2)(x4-x3)}$$

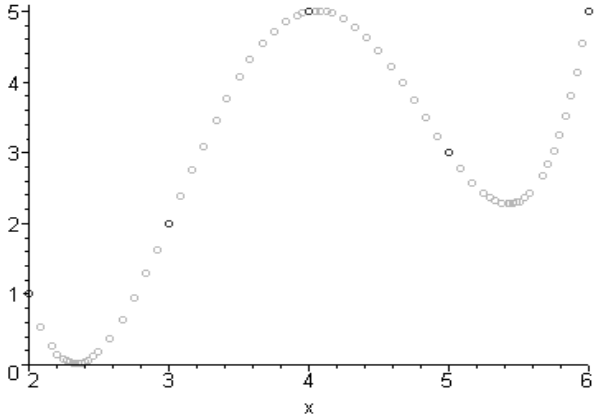
Запишем многочлен в стандартной форме.

```
> simplify(lag(x));
```

$$\frac{2}{3}x^4 - \frac{21}{2}x^3 + \frac{353}{6}x^2 - 137\,x + 113$$

Построение графиков

```
> l := [[ A[1,n], A[2,n]] $n=1..5]:
plot([l,lag(x)],x=2..6,style=point,symbol=circle);
```



Конечные разности.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$

Конечной разностью называется число $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, i=0,1,…,n–1.

Конечной разностью второго порядка называется число $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

Конечной разностью n -го порядка называется число $\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i)$

Конечные разности сводят в таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	…	$\Delta^n y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	…	$\Delta^n y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	…	—
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	…	—
…	…	…	…	…	…
…	…	…	$\Delta^2 y_{n-2}$	…	—
…	…	Δy_{n-1}	—	…	—
x_n	y_n	—	—	…	—

Задание 3 Найти все конечные разности для функции, заданной таблично $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Решение.

Составим таблицу конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	2	0	-8
1	3	2	-8	—
2	5	-6	—	—
3	-1	—	—	—

Указания.

Для нахождения конечных разностей пользуемся их определениями.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3 - 1 = 2$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 5 - 3 = 2$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = -1 - 5 = -6$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2 - 2 = 0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = -6 - 2 = -8$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -8 - 0 = -8$$

Интерполяционные полиномы Ньютона.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$ в равноотстоящих узлах интерполяции, то есть $x_0, x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = x_0 + nh$. h называют шагом интерполирования.

Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед)

$$N_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2) +$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot\dots\cdot(x - x_{n-1})$$

Эта формула применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции. За начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента.

Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад)

$$N_2(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot(x - x_{n-2}) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot(x - x_{n-2})\cdot\ldots\cdot(x - x_1)$$

Задание 4

Построить интерполяционные полиномы Ньютона для равноотстоящих узлов для функции из *задания 3*.

Решение.

Воспользуемся таблицей конечных разностей

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
0	1	2	0	-8
1	3	2	-8	—
2	5	-6	—	—
3	-1	—	—	—

$$N_1(x) = 1 + \frac{2}{1!}\cdot(x-0) + \frac{0}{2!}\cdot(x-0)\cdot(x-1) + \frac{-8}{3!}\cdot(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2) = -\frac{4}{3}\cdot(x^3 - 3x^2 + 2x) + 2x + 1 = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

$$N_2(x) = -1 - \frac{6}{1!}\cdot(x-3) - \frac{8}{2!}\cdot(x-3)\cdot(x-2) - \frac{8}{3!}\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1) = -1 - 6(x-3) -$$

$$-4(x-3)(x-2) - \frac{4}{3}(x-3)(x-2)(x-1)$$

Контрольное задание.

Для функции заданной таблично

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.9 & 1.3 \\ -2.3026 + 0.1\cdot n & -0.6932 + 0.1\cdot n & -0.1054 + 0.1\cdot n & 0.2624 + 0.1\cdot n \end{bmatrix},$$

где *n* номер вашей фамилии по журналу

1. Построить интерполяционный многочлен по определению и записать его в стандартной форме;
2. Построить график таблично заданной функции и интерполяционного многочлена на одном рисунке;
3. Построить интерполяционный полином Лагранжа;
4. Построить интерполяционные полиномы Ньютона.

Контрольные вопросы.

1. Какой многочлен назовем интерполяционным для функции $y = f(x)$ заданной таблично $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{bmatrix}$?
2. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?
3. Что называется конечной разностью третьего порядка?
4. Как строится интерполяционный многочлен Лагранжа?
5. Как строится интерполяционный многочлен Ньютона?
6. Что такое шаг интерполирования? Когда узлы интерполяции называются равноотстоящими?

Лабораторная работа 2.

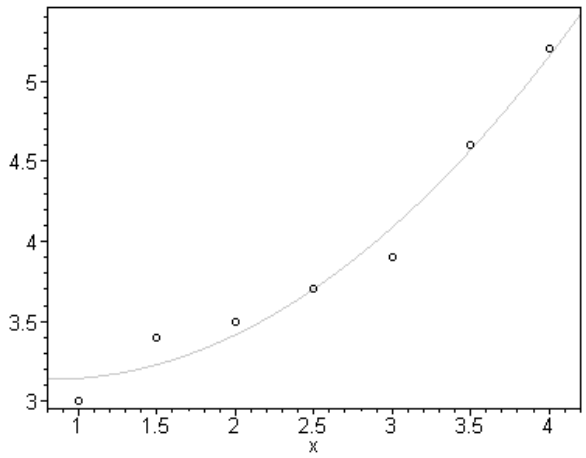
Аппроксимация по методу наименьших квадратов (МНК).

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Иногда экспериментальных данных много и они очень «густо» расположены. В этом случае, мы можем провести линию, чтобы она как можно меньше уклонялась от точек $(x_k; y_k)$, $k = 0...n$, т.е. можем построить функцию $\varphi(x)$ так чтобы величина отклонения S была наименьшей из всех возможных.

$S = \sum_{k=0}^{n} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 - \min$ ***f(x), φ(x)*** $\in$ **[a,b]** .



Поиск функции $\varphi(x)$ обеспечивающей этот минимум, называют аппроксимацией по методу наименьших квадратов (МНК).

Будем аппроксимировать функцию $y = f(x)$ полиномом $P_m(x)$ степени не выше m

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

При аппроксимации функции по МНК нет зависимости между степенью полинома и количеством точек.

Полином по МНК подбирается так, чтобы минимизировать функцию $S = S(a_0,..., a_m) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - P_m(x_k))^2$. Эта функция есть не что иное, как сумма квадратов отклонений значений аппроксимирующего полинома от значений y_k аппроксимируемой функции в известных из таблицы точках x_k .

Функция $S(a_0...a_n)$ всегда больше или равна нуля. В соответствии с необходимыми условиями существования экстремума, если экстремум функции нескольких переменных существует, необходимо, чтобы все частные производные функции по её переменным равнялись нулю в точке экстремума. Если такая точка найдётся, то это - точка минимума, т.к. функция *S* неотрицательна. То есть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \\ \dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(y_k - (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_0))^2\right) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial a_1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(y_k - (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_0))^2\right) = 0; \\ \dots \\ \dfrac{\partial}{\partial a_m}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(y_k - (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_0))^2\right) = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему m уравнений с m неизвестными относительно параметров $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_m$, получим конкретный вид полинома.

На практике эту систему для удобства преобразуют к виду

$$\begin{cases} a_0 \cdot s_0 + a_1 \cdot s_1 + \dots + a_m \cdot s_m = t_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 \cdot s_m + a_1 \cdot s_{m+1} + \dots + a_m \cdot s_{2m} = t_m \end{cases} \quad \textbf{(1)} \text{ где } s_l = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{\,l}}{n+1} \quad l = 0 \,..\, 2m \quad t_k = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{\,k}}{n+1} \quad k = 0 \,..\, m$$

и называют систему **(1) нормальной** системой МНК.

Задание №1

Для функции f(x) заданной таблично $R = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 3 & 3.5 & 3.9 & 4.6 \end{bmatrix}$

1) аппроксимировать ее многочленом второй степени.

2) на одном чертеже построить точечный график заданной функции и график аппроксимирующей функции

3) найти S

Решение.

1)Будем аппроксимировать f(x) многочленом второй степени P(x)= $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Для поиска неизвестных коэффициентов, решим систему **(1),** при условии m=2.

Предварительно найдем $s_l = \frac{\sum\limits_{i=0}^{3} x_i^{\,l}}{4}$, $l = 0 \,..\, 4$ и $t_k = \frac{\sum\limits_{i=0}^{3} y_i x_i^{\,k}}{4}$, $k = 0 \,..\, 2$

```
restart; Digits:=5;
R:=matrix([[x, 1, 2, 3, 4], [y, 3, 3.5, 3.9, 4.6]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 3 & 3.5 & 3.9 & 4.6 \end{bmatrix}$$

```
>s[4]:=sum(R[1,i]^4,i=2..5)/4;s[3]:=sum(R[1,i]^3,i=2..5)/4;s[2]:=
sum(R[1,i]^2,i=2..5)/4;s[1]:=sum(R[1,i]^1,i=2..5)/4;s[0]:=sum(R[
1,i]^0,i=2..5)/4;
```

$$s_4 := \frac{177}{2}$$

$$s_3 := 25$$

$$s_2 := \frac{15}{2}$$

$$s_1 := \frac{5}{2}$$

$$s_0 := 1$$

```
>t[2]:=sum(R[1,i]^2*R[2,i],i=2..5)/4;t[1]:=sum(R[1,i]^1*R[2,i],i=
2..5)/4;t[0]:=sum(R[1,i]^0*R[2,i],i=2..5)/4;
```

$$t_2 := 31.425$$

$$t_1 := 10.025$$

$$t_0 := 3.7500$$

Решим нормальную систему МНК $\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 = t_1 \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 = t_2 \end{cases}$

```
>solve({s[0]*a[0]+s[1]*a[1]+s[2]*a[2]=t[0],s[1]*a[0]+s[2]*a[1]+s[
3]*a[2]=t[1],s[2]*a[0]+s[3]*a[1]+s[4]*a[2]=t[2]},{a[2],a[1],a[0]
});
```

$$\{ a_2 = .050000,\ a_1 = .27000,\ a_0 = 2.7000 \}$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

```
>a[2]:=.05;a[1]:=.27;a[0]:=2.70;P:=unapply(a[2]*x^2+a[1]*x+a[0],
x);
```

$$a_2 := .05$$

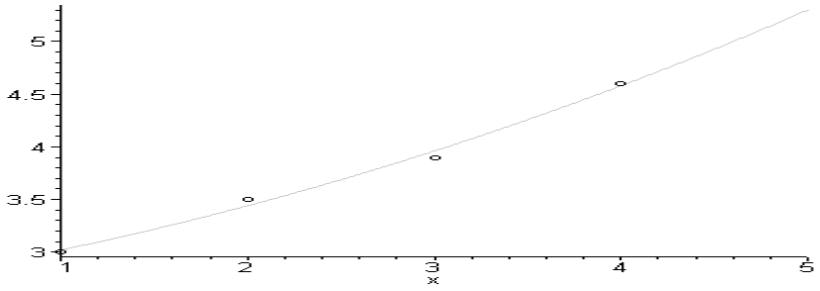
$$a_1 := .27$$

$$a_0 := 2.70$$

$$P := x \to .05\, x^2 + .27\, x + 2.70$$

2) Теперь построим на одном графике f(x) и P(x):

```
>with(plots):f:=plot([[1,3],[2,3.5],[3,3.9],[4,4.6]],x=1..4,styl
e=point,symbol=circle,color=black):T:=plot(.05*x^2+.27*x+2.7,x=1
..5,color=cyan): display([T,f]);
```



3)Найдем сумму квадратов отклонений (квадрат ошибки)

S: $S = S(a_0 ... a_m) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - P_m(x_k))^2$

```
> S:=sum((R[2,i]-P(i-1))^2,i=2..5);
```

$S := .0080000$

В пакете символьной математики Maple предусмотрена функция fit ,находящаяся в библиотеке статистических расчетов stats . Fit позволяет подобрать аппроксимирующую функцию F(x), по методу наименьших квадратов. Используя fit, подберем F(x) для нашего примера.

```
> with(stats):
>Digits:=5:
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2+b*x+c]]([[ 1, 2, 3, 4], [ 3, 3.5, 3.9, 4.6]]);
```

$$y = .050000\, x^2 + .27000\, x + 2.7000$$

Контрольное задание№1

Функция f(x) задана таблично

$[x, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

$[y, 3 - .1\, n, 3.5 + .1\, n, 3.9 + .1\, n, 4.6 + .2\, n, 10.5 + .3\, n, 21.3 + .5\, n, 38.7 + .5\, n, 59.7 + n]$

где n - номер вашего варианта.

1) аппроксимировать ее многочленами второй и третьей степени.

2) на одном чертеже построить точечный график заданной функции и графики аппроксимирующих функций.

3) найти S.

4) сравнить результаты и выбрать лучшее приближение в смысле минимума среднеквадратического отклонения.

5)Сделать проверку, используя функцию fit.

В качестве аппроксимирующих функций (в зависимости от характера точечного графика функции $y = f(x)$) часто используют следующие функции:

1) $y = A\, x^{\alpha}$ -степенная,

2) $y = A\, \mathbf{e}^{(\alpha\, x)}$ - показательная,

3) $y = \frac{1}{A\, x + B}$ - дробно-линейная,

4) $y = A \ln(x) + B$ - логарифмическая,

5) $y = \frac{A\, 1}{x} + B$ - гиперболическая,

и так далее

Нахождение аппроксимирующей функции вида 1)-5) может быть сведено к нахождению параметров линейной функции.

Идея заключается в следующем:

пусть таблица функции $y = f(x)$ такова, что аппроксимирующую функцию целесообразно искать в виде степенной функции

$F(x) = A \cdot x^{\alpha}$ (A>0).

Прологарифмируем равенство: $\ln(\mathrm{F}(x)) = \ln(A) + \alpha \ln(x)$

Обозначим $a_1 = \alpha, a_0 = \ln(A)$, **(2)** и $u = \ln(x)$, $P = \ln(F(x))$, тогда $\ln(\mathrm{F}(x)) = \ln(A) + \alpha \ln(x) \Leftrightarrow P = a_1 u + a_0$ т.е. задача свелась к отысканию аппроксимирующей функции в виде полинома первой степени (линейной) $P = a_1 u + a_0$.

Практически нужно проделать следующее:

1. по заданной таблице значений функции $y = f(x)$ составить новую, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице;

2. по новой таблице найти a_1, a_0 по МНК

3. используя обозначения **(2)** , найти α , A и подставить их в $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$.

Пример.

Функцию f(x) заданную таблично $K := \begin{bmatrix} x & 1.1 & 2.4 & 3.7 & 5.1 \\ y & .3 & 1.1 & 2.3 & 3.8 \end{bmatrix}$

аппроксимировать по МНК

1) прямой $P(x) = a_1 x + a_0$

2) степенной функцией $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$.

Решение.

1) Значения параметров a_1, a_0 многочлена первой степени $P(x) = a_1 x + a_0$ находят из решения нормальной системы МНК

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 = t_1 \end{cases}, \text{ где } s_l = \frac{\sum_{i=0}^{3} x_i^{\,l}}{4} \quad l = 0,1,2 \qquad t_k = \frac{\sum_{i=0}^{3} y_i x_i^{\,k}}{4} \qquad k = 0,1$$

Запишем и решим систему, используя пакет MAPLE6

```
> restart;Digits:=4;
>K:=matrix([[x, 1.1, 2.4, 3.7, 5.1], [y, .3, 1.1, 2.3, 3.8]]);
```

$$Digits := 4$$

$$K := \begin{bmatrix} x & 1.1 & 2.4 & 3.7 & 5.1 \\ y & .3 & 1.1 & 2.3 & 3.8 \end{bmatrix}$$

```
>s[2]:=sum(K[1,i]^2,i=2..5)/4;s[1]:=sum(K[1,i]^1,i=2..5)/4;s[0]:=
sum(K[1,i]^0,i=2..5)/4;
```

$$s_2 := 11.67$$

$$s_1 := 3.075$$

$$s_0 := 1$$

```
>t[1]:=sum(K[1,i]^1*K[2,i],i=2..5)/4;t[0]:=sum(K[1,i]^0*K[2,i],i=
2..5)/4;
```

$$t_1 := 7.715$$

$$t_0 := 1.875$$

```
>solve({s[0]*a[0]+s[1]*a[1]=t[0],s[1]*a[0]+s[2]*a[1]=t[1]},{a[1],
a[0]});
```

$$\{ a_1 = .8803, a_0 = -.8320 \}$$

```
> a[0] := -.8320; a[1] := .8803;P:=unapply(a[1]*x+a[0],x);
```

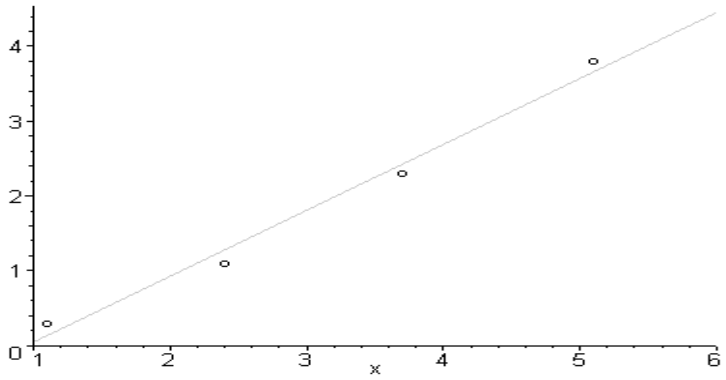
$$a_0 := -.8320$$

$$a_1 := .8803$$

$$P := x \to .8803\,x - .8320$$

Таким образом, аппроксимирующая функция имеет вид: $P(x) = 0{,}8803x - 0{,}8320$.
Построим на одном рисунке график таблично заданной функции f(x) и функции $P(x) = 0{,}8803x - 0{,}8320$, средствами MAPLE6

```
>with(plots):f:=plot([[1.1,.3],[2.4,1.1],[3.7,2.3],[5.1,3.8]],x=1
..6,style=point,symbol=circle,color=black):L:=plot( .8803*x-
.8320,x=1..6,color=cyan): display([L,f]);
```



Вычислим сумму квадратов уклонений по формуле $S_1 = \sum_{k=0}^{n} (y_k - P(x_k))^2$

```
> S[1]:=(K[2,2]-P(1.1))^2+(K[2,3]-P(2.4))^2+(K[2,4]-
P(3.7))^2+(K[2,5]-P(5.1))^2;
```

$$S_1 := .09534$$

2) А теперь будем аппроксимировать f(x) степенной функцией $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$, используя вышеописанную схему.

1. по заданной таблице значений функции $y = f(x)$ составим новую, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице:

```
> restart;K:=matrix([[x, 1.1, 2.4, 3.7, 5.1], [y, .3, 1.1, 2.3,
3.8]]);
```

$$Digits := 4$$

$$K := \begin{bmatrix} x & 1.1 & 2.4 & 3.7 & 5.1 \\ y & .3 & 1.1 & 2.3 & 3.8 \end{bmatrix}$$

```
> Digits:=4;R:=matrix([[x, ln(1.1), ln(2.4), ln(3.7), ln(5.1)],
[y, ln(.3), ln(1.1), ln(2.3), ln(3.8)]]);
```

$$Digits := 4$$

$$R := \begin{bmatrix} x & .09531 & .8755 & 1.308 & 1.629 \\ y & -1.204 & .09531 & .8329 & 1.335 \end{bmatrix}$$

2. по новой таблице находим a_1, a_0 по МНК:

```
>s[2]:=sum(R[1,i]^2,i=2..5)/4;s[1]:=sum(R[1,i]^1,i=2..5)/4;s[0]:=
sum(R[1,i]^0,i=2..5)/4;
```

$$s_2 := 1.285$$

$$s_1 := .9770$$

$$s_0 := 1$$

```
>t[1]:=sum(R[1,i]^1*R[2,i],i=2..5)/4;t[0]:=sum(R[1,i]^0*R[2,i],i=
2..5)/4;
```

$$t_1 := .8082$$

$$t_0 := .2648$$

```
>solve({s[0]*a[0]+s[1]*a[1]=t[0],s[1]*a[0]+s[2]*a[1]=t[1]},{a[1],
a[0]});
```

$$\{ a_1 = 1.663, a_0 = -1.360 \}$$

3. используя обозначения $a_1 = \alpha, a_0 = \ln(A)$, найдем α , A .

$\alpha = a_1$, $A = e^{a_0}$

```
>alpha:=a[1]:alpha:= 1.663;A:=exp(a[0]): A:=exp( -1.360);
```

$$\alpha := 1.663$$

$$A := .2567$$

и подставим их в $F(x) = A \cdot x^{\alpha}$.

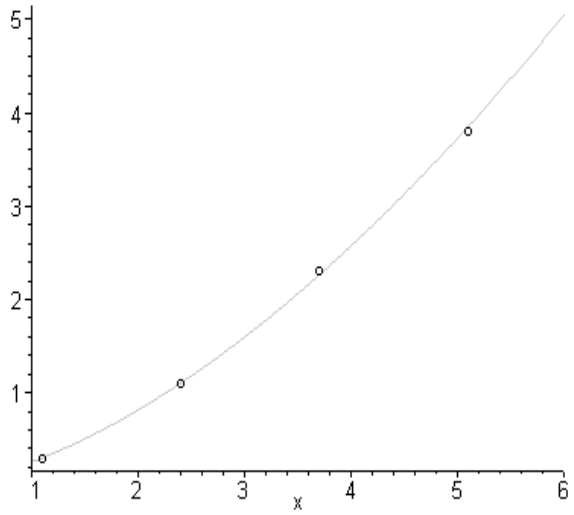
```
> F:=unapply(A*x^alpha,x);
```

$$F := x \to .2567\, x^{1.663}$$

аппроксимирующая функция имеет вид: $F(x) = 0{,}2567 \cdot x^{1{,}663}$

Построим на одном рисунке график таблично заданной функции f(x) и функции $F(x) = 0{,}2567 \cdot x^{1{,}663}$, средствами MAPLE6

```
>with(plots):f:=plot([[1.1,.3],[2.4,1.1],[3.7,2.3],[5.1,3.8]],x=
1..6,style=point,symbol=circle,color=black):T:=plot(.2567*x^1.66
3,x=1..6,color=cyan): display([T,f]);
```



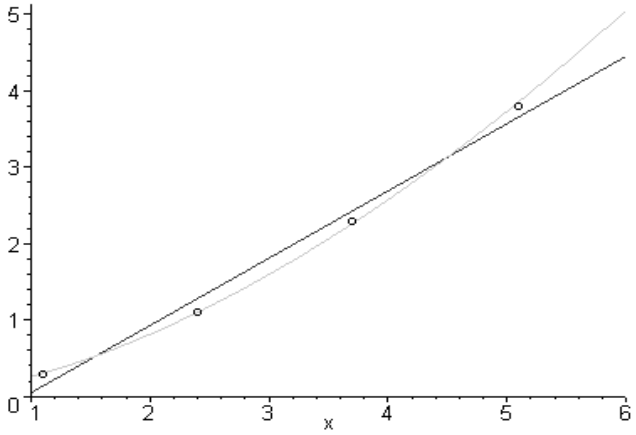
Вычислим сумму квадратов уклонений по формуле $S_2 = \sum_{k=0}^{n} (y_k - F(x_k))^2$

```
> S[2]:=(K[2,2]-F(1.1))^2+(K[2,3]-F(2.4))^2+(K[2,4]-
F(3.7))^2+(K[2,5]-F(5.1))^2;
```

$$S_2 := .004659$$

Самостоятельно сравните качество приближений (в смысле МНК) и выберите лучшее. В заключение построим на одном рисунке графики f(x) , $P(x) = 0{,}8803\,x - 0{,}8320$ и $F(x) = 0{,}2567 \cdot x^{1{,}663}$.

```
>f:=plot([[1.1,.3],[2.4,1.1],[3.7,2.3],[5.1,3.8]],x=1..6,style=po
int,symbol=circle,color=black):T:=plot(.2567*x^1.663,x=1..6,colo
r=cyan):L:=plot( .8803*x-.8320,x=1..6): display([T,L,f]);
```



Контрольное задание №2

Функцию f(x) заданную таблично

$\begin{bmatrix} x & 1.1+k & 1.7+k & 2.4+k & 3.0+k & 3.7+k & 4.5+k & 5.1+k & 5.8+k \\ y & .3+m & .6+m & 1.1+m & 1.7+m & 2.3+m & 3.0+m & 3.8+m & 4.6+m \end{bmatrix}$, где

$k = .01\,n$ и $m = .05\,n$, причем n - номер вашего варианта, аппроксимировать по МНК

1) прямой $F_1(x) = a_1\,x + a_0$

2) степенной функцией $F_2(x) = A\,x^{\alpha}$.

3) на одном чертеже построить точечный график заданной функции и графики аппроксимирующих функций.

4) найти S.

5) сравнить результаты и выбрать лучшее приближение, в смысле минимума среднеквадратического отклонения.

Контрольные вопросы.

1. В чем суть аппроксимации таблично заданной функции по МНК? Чем отличается этот метод от метода интерполирования?
2. Каким образом сводится задача построения аппроксимирующих функций в виде различных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, гиперболической) к случаю линейной функции?

Лабораторная работа №3 Приближенное вычисление интегралов.

Определенные интегралы не всегда можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница.

Например, для интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ не существует первообразной функции в классе элементарных функций.

Если к тому же учесть, что иногда подынтегральная функция вовсе задается таблицей или графиком, то становится понятным, почему интегрирование по формуле Ньютона-Лейбница не получает широкого применения на практике.

В подобных случаях применяют различные методы приближенного интегрирования. Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называют **квадратурными формулами**. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом, например многочленом Лагранжа $L_n(x)$, и получается приближенное равенство $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, легко реализуемым на ЭВМ и позволяющим получать результат с достаточной точностью. При этом, естественно, предполагается, что отрезок $[a;b]$ разбит на n частей точками $a = x_0, x_1, ...x_n = b$, наличие которых подразумевается при построении многочлена Лагранжа.

Подставим вместо $L_n(x)$ его представление:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$, получим:

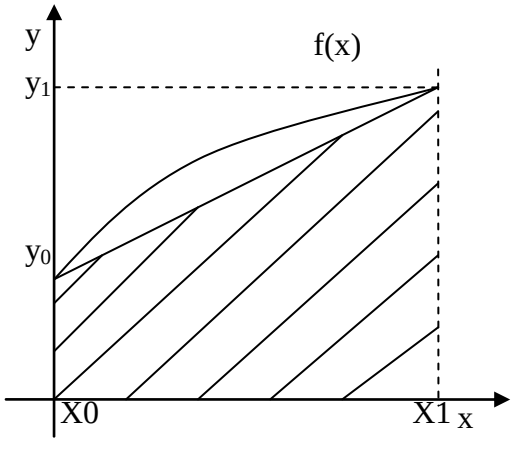
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} dx$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i A_i \text{ , где } A_i = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} dx$$

Таким образом, **квадратурная формула общего вида:**

$$\int_a^b f(x)dx = y_0A_0 + y_1A_1 + \ldots + y_nA_n$$



Формула трапеций.

В качестве узлов интерполирования выберем начало и конец отрезка интегрирования, то есть заменим подынтегральную функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа первой степени. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = y_0A_0 + y_1A_1$$

Введем обозначения $a = x_0, x_1 = b$ и шаг интегрирования $h = x_1 - x_0$ Найдем A_0, A_1

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \frac{h}{2} \quad A_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_{01}} dx = \frac{h}{2}$$

Следовательно

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$ - формула трапеций.

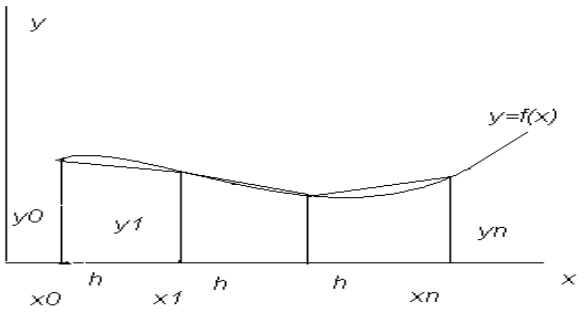
Замечание.

Геометрически, формула трапеций означает замену площади криволинейной фигуры площадью трапеции (см. рисунок).

Если аналитическое выражение подынтегральной функции $f(x)$ известно, то для **оценки погрешности метода трапеций** можно воспользоваться формулой $R \le \frac{b-a}{12} h^2 M_2$, где $M_2 = \max|f''(x)|, x \in [a,b]$

Очевидно, что чем меньше шаг h, тем меньше приближенное значение отличается от точного значения.

Разделим промежуток интегрирования $[a;b]$ на n равных частей $[x_{0,} x_1]$, $[x_{1,} x_2]$, …, $[x_{n-1,} x_n]$ (шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$.) К каждому из полученных промежутков применим формулу трапеций.



$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$ или

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}))$ - **общая формула трапеций**.

Формула Симпсона.

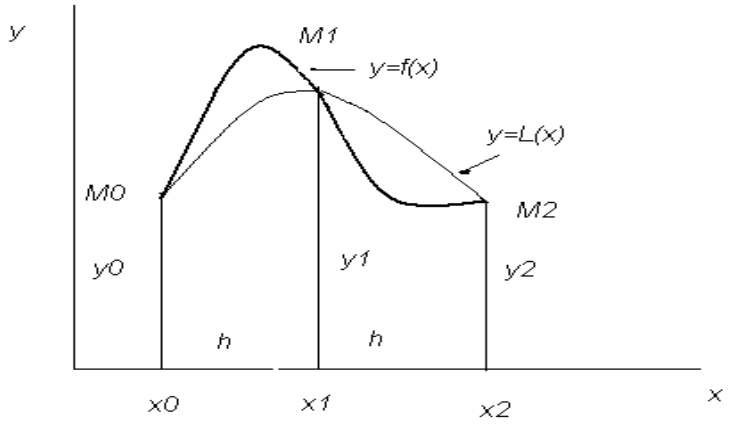
Заменим подынтегральную функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа второй степени. В качестве узлов интерполирования выберем концы и середину отрезка интегрирования.

Тогда из квадратурной формулы общего вида получим $\int_a^b f(x)dx = y_0 A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2$

Несложно вычислить коэффициенты A_0, A_1, A_2. В результате получим:

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ **-формула Симпсона**.

Геометрически эта формула получается в результате замены кривой $y = f(x)$, параболой $y = L(x)$, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (см. рис.)



Если аналитическое выражение подынтегральной функции $f(x)$ известно, то для **оценки погрешности метода Симпсона** можно воспользоваться формулой $R \le \frac{b-a}{180} h^4 M_4$, где $M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]$

Если отрезок интегрирования большой, то, разбив его на четное число отрезков длины h ($h = \frac{b-a}{2n}$) можно получить **общую формулу Симпсона**.

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n}))$

Замечание. Для оценки погрешности метода Симпсона может быть использована простая формула. Пусть R_n и R_{2n} - погрешности интегрирования по формуле Симпсона, соответственно при n и $2n$ отрезках разбиения. Учитывая оценку погрешностей, можно составить равенство

$\frac{R_n}{R_{2n}} = \frac{h_n^4}{h_{2n}^4}$, где h_n и h_{2n} – длина отрезков разбиения (шаг интегрирования) в первом и во втором случае. Понятно, что $h_{2n} = \frac{h_n}{2}$. Тогда $R_n = 16 R_{2n}$

Если I – истинное значение интеграла, то

$I = I_n + R_n$ и $I = I_{2n} + R_{2n}$ откуда $I_n + 16R_{2n} = I_{2n} + R_n$, т.е. $|R_{2n}| = \frac{|I_n - I_{2n}|}{15}$

Эта формула называется правилом Рунге. Она удобна для практической оценки погрешности метода Симпсона, но требует двойного пересчета.

Пример.

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(3x+4)^2} dx$ с шагом h=0,25

1) по формуле трапеций,
2) по формуле Симпсона.
3) Оценить погрешность вычислений.

4) уточнить значение интеграла и погрешность вычислений по правилу Рунге (для метода Симпсона)

Решение.

Предварительно найдем точное значение интеграла и его приближенное значение со всеми верными знаками.

```
> int(x/(3*x+4)^2,x=-1...1);evalf(int(x/(3*x+4)^2,x=-1...1));
```

$$-\frac{8}{21}+\frac{1}{9}\ln(7)$$

-.1647401422

Запишем подынтегральную функцию

```
> restart:Digits:=4:f:=x->x/(3*x+4)^2;
```

$$f := x \to \frac{x}{(3x+4)^2}$$

По условию h=0,25, $a=-1, b=1$, тогда отрезок разобьем на $n=\frac{b-a}{h}=8$ частей точками $x_0, x_1, ...x_8$, где $x_i = x_0 + ih$ и найдем значения подынтегральной функции в этих точках $y_0, y_1, ...y_8$

```
> x[0]:=-1;h:=.25;for i from 0 by 1 to 8 do
x[i]:=x[0]+i*h:y[i]:=f(x[i]):  end do;
```

$x_0 := -1$

$h := .25$

$x_0 := -1.$

$y_0 := -1.000$

$x_1 := -.75$

$y_1 := -.2449$

$x_2 := -.50$

$y_2 := -.08000$

$x_3 := -.25$

$y_3 := -.02367$

$x_4 := 0.$

$y_4 := 0.$

$x_5 := .25$

$y_5 := .01108$

$x_6 := .50$

$y_6 := .01653$

$$x_7 := .75$$

$$y_7 := .01920$$

$$x_8 := 1.00$$

$$y_8 := .02041$$

Вычислим интеграл по формуле трапеций $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}))$

```
> A:=h/2*(y[0]+y[8]+2*sum('y[k]','k'=1..7));
```

$$A := -.1979$$

А теперь по формуле Симпсона (так как n - четное)

```
B:=(h/3)*(y[0]+y[8]+4*sum('y[2*k-
1]','k'=1..4)+2*sum('y[2*k]','k'=1..3));
```

$$B := -.1717$$

Оценим погрешности.

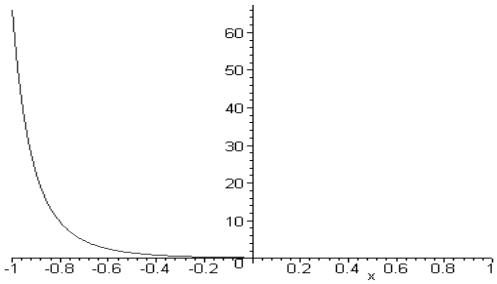
1) метод трапеций.

$$R \le \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \text{ где } M_2 = \max\left|f''(x)\right|, x \in [a,b]$$

Предварительно оценим M_2

```
> f2:=diff(f(x),x$2); plot(abs(f2),x=-1..1);
```

$$f2 := -12\frac{1}{(3x+4)^3} + \frac{54x}{(3x+4)^4}$$




```
> M[2]:=66;
```

$$M_2 := 66$$

Оценим погрешность R

```
> R:=(2/12)*h^2*M[2];
```

$$R := .6875$$

Таким образом, погрешность метода трапеций $R \le 0{,}6875$

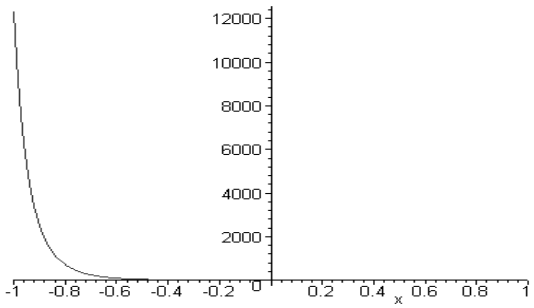
2) метод Симпсона

$$R \le \frac{b-a}{180} h^4 M_4, \text{ где } M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]$$

Предварительно оценим M_4

```
> f4:=diff(f(x),x$4); plot(abs(f4),x=-1..1);
```

$$f4 := -2592\frac{1}{(3x+4)^5} + \frac{9720x}{(3x+4)^6}$$




```
> M[4]:=2592+9720;
```

$$M_4 := 12312$$

Оценим погрешность R

```
> R:=2/180*h^4*M[4];
```

$$R := .5342$$

Таким образом, погрешность метода трапеций $R \le 0{,}5342$

Уточним значение интеграла и погрешность вычислений по правилу Рунге (для метода Симпсона)

Так как n=8, то $2n$=16. Вычислим интеграл по формуле Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 16 частей. Тогда h=0,125.

```
> x[0]:=-1;h:=.125;for i from 0 by 1 to 16 do
x[i]:=x[0]+i*h:y[i]:=f(x[i]):  end do:
```

$$x_0 := -1$$

$$h := .125$$

Вычислим значение интеграла по формуле Симпсона

```
> C:=(h/3)*(y[0]+y[16]+4*sum('y[2*k-
1]','k'=1..8)+2*sum('y[2*k]','k'=1..7));
```

$$C := -.1655$$

Воспользуемся правилом Рунге $\left|R_{2n}\right| = \dfrac{\left|I_n - I_{2n}\right|}{15}$

```
> B := -.1717;C := -.1655;R:=eval(abs(B-C)/15);
```

$$R := .0004133$$

Таким образом, уточненное значение интеграла -0,1655 с абсолютной погрешностью 0,0004

Замечание.

В пакете символьной математики MAPLE есть библиотека **`student`**.

В ней можно найти команды, позволяющие вычислить интегралы требуемыми способами.

Контрольное задание.

1) Вычислить интеграл по формуле трапеций с погрешностью 0,001

(те есть $\dfrac{b-a}{12}h^2 M_2 \le 0{,}001$)

2) Вычислить интеграл по формуле Симпсона при $n = 10$ и уточнить значение и погрешность по правилу Рунге.
3) Сделать проверку полученных результатов, используя соответствующие методы: трапеций (**`trapezoid)`** и Симпсона(**`simpson`**) из библиотеки **`with(student):`**

Условие вашего задания:

Номер варианта по журналу	1	2
1	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	$\int_{1,2}^{2} \frac{\log(x+2)}{x} dx$
2	$\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$	$\int_{1,2}^{2} (x+1)sinx\, dx$
3	$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$	$\int_{0,2}^{1} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x^2+1} dx$
4	$\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos(x)}{x+1} dx$
5	$\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2)dx$
6	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$
7	$\int_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{\log(x^2+1)}{x} dx$
8	$\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x)}{x+2} dx$
9	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$	$\int_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin x\, dx$
10	$\int_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$	$\int_{0,4}^{0,8} \frac{\mathrm{tg}(x^2+0,5)}{1+2x^2} dx$
11	$\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1} dx$
12	$\int_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$	$\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1}\cos(x^2)\, dx$
13	$\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$	$\int_{1,4}^{3} x^2 \lg x\, dx$

14	$\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	$\int_{1,4}^{2,2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1}dx$
15	$\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$
16	$\int_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$	$\int_{0,8}^{1,6} (x^2+1)\sin(x-0,5)\,dx$
17	$\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$	$\int_{0,6}^{1,4} x^2\cos x\,dx$
18	$\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$
19	$\int_{164}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+067}}$	$\int_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1}dx$
20	$\int_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$	$\int_{0,5}^{1,2} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x+1}dx$
21	$\int_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$	$\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}}dx$
22	$\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$	$\int_{0,2}^{1} (x+1)\cos(x^2)\,dx$
23	$\int_{2,1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0,4)}{x+2}dx$
24	$\int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$	$\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1}\lg(x+3)\,dx$

Контрольные вопросы.

1. Как зависят коэффициенты A_i от подынтегральной функции $f(x)$ в квадратурной формуле?
2. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага h?
3. Каким способом можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?
4. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?

Лабораторная работа №4.
Решение систем линейных уравнение (СЛУ).

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Обозначим через $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицу из коэффициентов системы, через

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец ее свободных членов и через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец из неизвестных. Тогда

система кратко может быть записана в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$. Вектор X, обращающий систему в тождество, будем называть решением этой системы.

Все методы решения систем линейных уравнений можно разбить на два класса: прямые и итерационные. **Прямые методы** приводят к решению задачи за конечное число арифметических операций. Если все операции выполняются точно, то и решение будет точным. Понятно, однако, что из-за вычислительных ошибок (включая ошибки округления, а также возможные ошибки исходных данных) этот идеал практически недостижим. К прямым методам относятся: метод Крамера, метод Гаусса и его модификации (метод прогонки). **Итерационные методы** дают решение системы как предел последовательных приближений, вычисляемых по единообразной схеме. К ним относятся: метод простой итерации, метод Зейделя, градиентные методы.

Метод прогонки.

Метод прогонки прямой метод и является частным случаем метода Гаусса. Он применяется для решения СЛУ с трехдиагональными матрицами. Такие системы часто возникают при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных второго порядка. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ ..... \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

при этом будем полагать, что $a_1 = 0,\ c_n = 0$

Решение этой системы будем искать в виде

$x_i = P_i \cdot x_{i+1} + Q_i$, $i = 1,2,...,n$, где P_i, Q_i - **прогоночные коэффициенты**.

Эти коэффициенты вычисляются по следующим формулам

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1} \qquad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \cdot P_{i-1}} \qquad Q_i = \frac{d_i - a_i \cdot Q_{i-1}}{b_i + a_i \cdot P_{i-1}}, \text{ где } i = 2,3,...,n-1$$

Замечание. Так как $c_n = 0$, то и $P_n = 0$.

Общее число операций в методе прогонки равно $8n+1$, т.е. пропорционально числу уравнений. Такие методы решения СЛУ называют экономичными. Для сравнения число операций в методе Гаусса пропорционально n^3.

Для устойчивости метода прогонки достаточно выполнения условий:

$a_i \neq 0, c_i \neq 0$, где $i = 2,3,...,n-1$

$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, где $i = 1,2,...,n$

ПРИМЕР.

Методом прогонки решить СЛУ.

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 6 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 8 \\ -x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение.

В соответствии с введенными ранее обозначениями, запишем:

```
> restart; b[1]:=8;b[2]:=6;b[3]:=10;b[4]:=6;
```

$b_1 := 8$

$b_2 := 6$

$b_3 := 10$

$b_4 := 6$

```
> a[1]:=0;a[2]:=-1;a[3]:=2;a[4]:=-1;
```

$a_1 := 0$

$a_2 := -1$

$a_3 := 2$

$a_4 := -1$

```
> c[1]:=-2;c[2]:=-2;c[3]:=-4;c[4]:=0;
```

$c_1 := -2$

$c_2 := -2$

$c_3 := -4$

$c_4 := 0$

```
> d[1]:=6;d[2]:=3;d[3]:=8;d[4]:=5;
```

$d_1 := 6$

$$d_2 := 3$$

$$d_3 := 8$$

$$d_4 := 5$$

Будем искать прогоночные коэффициенты P_i по формулам $P_1 = \frac{-c_1}{b_1}$ и $P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \cdot P_{i-1}}$

```
> P[1]:=-c[1]/b[1];
> for i from 2 by 1 to 4 do  P[i]:=-c[i]/(b[i]+a[i]*P[i-1]);  end
do;
```

$$P_1 := \frac{1}{4}$$

$$P_2 := \frac{8}{23}$$

$$P_3 := \frac{46}{123}$$

$$P_4 := 0$$

Будем искать прогоночные коэффициенты Q_i по формулам $Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$ и $Q_i = \frac{d_i - a_i \cdot Q_{i-1}}{b_i + a_i \cdot P_{i-1}}$

```
> Q[1]:=d[1]/b[1];for i from 2 by 1 to 4 do  Q[i]:=(d[i]-
a[i]*Q[i-1])/(b[i]+a[i]*P[i-1]);  end do;
```

$$Q_1 := \frac{3}{4}$$

$$Q_2 := \frac{15}{23}$$

$$Q_3 := \frac{77}{123}$$

$$Q_4 := 1$$

прогоночные коэффициенты P_i, Q_i найдены:

```
P[1]:= 1/4:P[2]:= 8/23:P[3]:= 46/123:P[4]:=0:Q[1]:= 3/4:Q[2]:=
15/23:Q[3]:= 77/123:Q[4]:= 1:
```

На этом заканчивается **прямой ход** метода прогонки.
Обратный ход метода осуществляется в соответствии с формулами:

$x_i = P_i \cdot x_{i+1} + Q_i \qquad i = 1,2,...,n$

```
> for i from 4 by -1 to 1 do  x[i]:=P[i]*x[i+1]+Q[i];  end do;
```

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

$$x_3 := 1$$

$$x_4 := 1$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$

Нормы матриц и векторов.

Для исследования сходимости численных методов решения задач линейной алгебры, вводится понятие нормы векторов и матриц.

Нормой вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в n-мерном пространстве назовем неотрицательное число $\|\vec{x}\|$ обладающее следующими свойствами:

1) $\|\bar{x}\| \geq 0, \|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
2) $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ для любых действительных чисел λ
3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

Норма в каждом пространстве вводится по-своему. Наиболее употребляемыми являются следующие:

I. $\|\bar{x}\|_I = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

II. $\|\bar{x}\|_{II} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

III. $\|\bar{x}\|_{III} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

Рассмотрим линейное пространство квадратных матриц с действительными элементами, размером $n \times n$: $A_{n \times n}, B_{n \times n}, ...$

Нормой матрицы $A_{n \times n}$ называют неотрицательное число $\|A\|$, обладающее свойствами:

1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\|$=0 тогда и только тогда, когда A-нулевая матрица

2) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ для любых действительных чисел λ

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для всех матриц рассматриваемого пространства

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всех $n \times n$ матриц A и соответствующих матриц B

Как видно из последнего свойства, норма матриц должна быть согласована с нормой вектора.

Наиболее распространенные нормы матриц:

$\|A\|_I = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_{II} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

ПРИМЕР.

Для вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ и матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ вычислить различные нормы.

Решение.

$$\|\vec{x}\|_I = \max_{1 \le i \le n} |x_i| = \max(|3|, |-4|) = 4$$

$$\|\vec{x}\|_{II} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |3| + |-4| = 7$$

$$\|\vec{x}\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\|A\|_I = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(|-1| + |2|, |3| + |-5|) = 8$$

$$\|A\|_{II} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(|-1| + |3|, |2| + |-5|) = 7$$

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$$

Метод простых итераций.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Приведем систему к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

Эта система кратко может быть записана матричным уравнением $X = \alpha \cdot X + \beta$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Используя эту систему и выбрав начальную точку $X_0 = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, можно построить итерационную последовательность точек $X_0, X_1, \ldots X_k, \ldots$ по формулам

$$X_k = \alpha \cdot X_{k-1} + \beta$$

Имеет место, следующее достаточное условие сходимости метода простых итераций.

Метод простых итераций $X_k = \alpha \cdot X_{k-1} + \beta$ сходится к единственному решению системы $X = \alpha \cdot X + \beta$ при любом начальном приближении X_0, если хотя бы одна из норм матрицы α меньше единицы $\|\alpha\| < 1$.

При этом справедлива оценка погрешности $\|X_k - X_{k-1}\| \le \dfrac{\varepsilon(1-\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$, где ε – заданная погрешность.

ПРИМЕР.

Методом простых итераций с погрешностью 0,001 решить СЛУ

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение.

```
> restart;
> with(linalg):
```

Приведем СЛУ к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2 \\ x_2 = -0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}3 \\ x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}4 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = \alpha \cdot X + \beta$$

```
> Digits:=5: alpha:=matrix([[0,-.1,-.1],[-.2,0,-.1],[-.2,-
.2,0]]);beta:=matrix(3,1,[1.2,1.3,1.4]);
```

$$\alpha := \begin{bmatrix} 0 & -.1 & -.1 \\ -.2 & 0 & -.1 \\ -.2 & -.2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta := \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

Найдем нормы матрицы α

```
> norm(alpha);norm(alpha,1);norm(alpha,2);
```

.4

.4

.33614

Итак, итерационный процесс сходится. Пусть $\|\alpha\| =$ .33614

Строим итерационный процесс до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\|X_k - X_{k-1}\| \le \frac{\varepsilon(1-\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$$

Обозначим через $P = \|X_k - X_{k-1}\|$, а через $M = \dfrac{\varepsilon(1-\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$

```
> epsilon:=10.^(-3);M:=epsilon*(1-norm(alpha,2))/norm(alpha,2);
```

$$\varepsilon := .0010000$$

$$M := .0019750$$

В качестве X_0 выбирают любой вектор. Если нет никакой дополнительной информации о решении системы, за X_0 обычно принимают вектор свободных членов β.

Построение итерационного процесса можно описать следующим способом:

```
> X[0]:=beta;
> for i from 1 to 20 do X[i]:= evalm(multiply(alpha,X[i-
1])+beta);Z:=(X[i]-X[i-1]):P[i]:=norm(Z); if P[i]<=M then break
fi od;
```

$$X_0 := \beta$$

$$X_1 := \begin{bmatrix} .93 \\ .92 \\ .90 \end{bmatrix}$$

$$Z := X_1 - \beta$$

$$P_1 := .50$$

$$X_2 := \begin{bmatrix} 1.018 \\ 1.024 \\ 1.030 \end{bmatrix}$$

$$Z := X_2 - X_1$$

$$P_2 := .130$$

$$X_3 := \begin{bmatrix} .9946 \\ .9934 \\ .9916 \end{bmatrix}$$

$$Z := X_3 - X_2$$

$$P_3 := .0384$$

$$X_4 := \begin{bmatrix} 1.0015 \\ 1.0019 \\ 1.0024 \end{bmatrix}$$

$$Z := X_4 - X_3$$

$$P_4 := .0108$$

$$X_5 := \begin{bmatrix} .99957 \\ .99946 \\ .99932 \end{bmatrix}$$

$$Z := X_5 - X_4$$

$$P_5 := .00308$$

$$X_6 := \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 1.0002 \\ 1.0002 \end{bmatrix}$$

$$Z := X_6 - X_5$$

$$P_6 := .00088$$

Полученный результат необходимо округлить в пределах затребованной точности:

$$x_1 = 1.000, x_2 = 1.000, x_3 = 1.000$$

Контрольное задание 1.
Методом прогонки решить СЛУ.

Вариант1
$$\begin{cases} -11x_1 - 9x_2 = -122 \\ 5x_1 - 15x_2 - 2x_3 = -48 \\ -8x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -14 \\ 8x_3 - 15x_4 + 4x_5 = -50 \\ 3x_4 + 6x_5 = 42 \end{cases}$$

Вариант2
$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = -120 \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 = -91 \\ 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 5 \\ 5x_3 + 16x_4 - 4x_5 = -74 \\ -8x_4 + 16x_5 = -56 \end{cases}$$

Вариант3
$$\begin{cases} -13x_1 - 5x_2 = -66 \\ -4x_1 + 9x_2 - 5x_3 = -47 \\ -x_2 - 12x_3 - 6x_4 = -43 \\ 6x_3 + 20x_4 - 5x_5 = -74 \\ 4x_4 + 5x_5 = 14 \end{cases}$$

Вариант4
$$\begin{cases} -14x_1 - 6x_2 = -78 \\ -9x_1 + 15x_2 - x_3 = -73 \\ x_2 - 11x_3 + x_4 = -38 \\ -7x_3 + 12x_4 + 3x_5 = 77 \\ 6x_4 - 7x_5 = 91 \end{cases}$$

Вариант5
$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 48 \\ -5x_1 + 22x_2 + 8x_3 = 125 \\ -5x_2 - 11x_3 + x_4 = -43 \\ -9x_3 - 15x_4 + x_5 = 18 \\ x_4 + 7x_5 = -23 \end{cases}$$

Вариант6
$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = -58 \\ -6x_1 + 16x_2 + 9x_3 = 161 \\ 9x_2 - 17x_3 - 3x_4 = -114 \\ 8x_3 + 22x_4 - 8x_5 = -90 \\ 6x_4 - 13x_5 = -55 \end{cases}$$

Вариант7
$$\begin{cases} 15x_1 + 8x_2 = 92 \\ 2x_1 - 15x_2 + 4x_3 = -84 \\ -4x_2 + 11x_3 + 5x_4 = -77 \\ -3x_3 + 16x_4 - 7x_5 = 15 \\ 3x_4 + 8x_5 = -11 \end{cases}$$

Вариант8
$$\begin{cases} -11x_1 - 8x_2 = 99 \\ 9x_1 - 17x_2 + x_3 = -75 \\ -4x_2 + 20x_3 + 9x_4 = 66 \\ -4x_3 - 14x_4 + 3x_5 = 54 \\ -6x_4 + 14x_5 = 8 \end{cases}$$

Вариант9
$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 32 \\ -2x_1 + 12x_2 - 7x_3 = 15 \\ 2x_2 - 9x_3 + x_4 = -10 \\ -8x_3 + 17x_4 - 4x_5 = 133 \\ -7x_4 + 13x_5 = -76 \end{cases}$$

Вариант10
$$\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 = -75 \\ 6x_1 + 12x_2 = 126 \\ -3x_2 + 5x_3 = 13 \\ -9x_3 + 21x_4 + 8x_5 = -40 \\ -5x_4 - 6x_5 = -24 \end{cases}$$

Вариант11
$$\begin{cases} -10x_1 - 9x_2 = 7 \\ -5x_1 - 21x_2 - 8x_3 = 29 \\ 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 31 \\ 8x_4 + 2x_5 = 56 \\ 2x_4 + 10x_5 = -24 \end{cases}$$

Вариант12
$$\begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -114 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 81 \\ -2x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_3 - 14x_4 + 7x_5 = -38 \\ 8x_4 + 10x_5 = 144 \end{cases}$$

Вариант13
$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 = 125 \\ -8x_1 + 14x_2 + 6x_3 = -56 \\ -5x_2 - 17x_3 + 8x_4 = 144 \\ x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 36 \\ -4x_4 - 10x_5 = 70 \end{cases}$$

Вариант14
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4 \\ 7x_1 - 17x_2 - 8x_3 = 132 \\ -9x_2 + 19x_3 + 8x_4 = -59 \\ 7x_3 - 20x_4 + 4x_5 = -193 \\ -4x_4 + 12x_5 = -40 \end{cases}$$

Вариант15
$$\begin{cases} 16x_1 - 8x_2 = 0 \\ -7x_1 - 16x_2 + 5x_3 = -123 \\ 4x_2 + 12x_3 + 3x_4 = -68 \\ -4x_3 + 12x_4 - 7x_5 = 104 \\ -x_4 + 7x_5 = 20 \end{cases}$$

Вариант16
$$\begin{cases} 18x_1 - 9x_2 = -81 \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 71 \\ -9x_2 + 21x_3 - 8x_4 = -39 \\ -4x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 64 \\ 7x_4 + 12x_5 = 3 \end{cases}$$

Вариант17
$$\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 = 51 \\ -x_1 + 13x_2 + 6x_3 = 100 \\ -9x_2 - 15x_3 - 4x_4 = -12 \\ -x_3 - 7x_4 + x_5 = 47 \\ 9x_4 - 18x_5 = -90 \end{cases}$$

Вариант18
$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = -14 \\ 7x_1 - 19x_2 + 9x_3 = -55 \\ -4x_2 + 21x_3 - 8x_4 = 49 \\ 7x_3 - 23x_4 + 9x_5 = 86 \\ 4x_4 - 7x_5 = 8 \end{cases}$$

Вариант19
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 16 \\ -8x_1 + 16x_2 + x_3 = -110 \\ 6x_2 - 16x_3 + 6x_4 = 24 \\ -8x_3 + 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ 5x_4 - 13x_5 = 87 \end{cases}$$

Вариант20 $\begin{cases} -6x_1+6x_2=30 \\ 2x_1+10x_2-7x_3=-31 \\ -8x_2+18x_3+9x_4=108 \\ 6x_3-17x_4-6x_5=-114 \\ 9x_4+14x_5=124 \end{cases}$

Вариант21 $\begin{cases} 7x_1-2x_2=65 \\ -3x_1-7x_2+4x_3=23 \\ -2x_2+15x_3+5x_4=1 \\ -2x_3-12x_4-8x_5=-58 \\ -3x_4-10x_5=-8 \end{cases}$

Вариант22 $\begin{cases} -14x_1+6x_2=82 \\ 2x_1+7x_2=-51 \\ -7x_2-18x_3-9x_4=-46 \\ 2x_3-18x_4+2x_5=111 \\ -7x_4-7x_5=35 \end{cases}$

Вариант23 $\begin{cases} 7x_1-5x_2=38 \\ -6x_1+19x_2-9x_3=14 \\ 6x_2-18x_3+7x_4=-45 \\ -7x_3-11x_4-2x_5=30 \\ 5x_4-7x_5=48 \end{cases}$

Вариант24 $\begin{cases} -11x_1+9x_2=-117 \\ -9x_1+17x_2+6x_3=-97 \\ 5x_2+20x_3+8x_4=-6 \\ -6x_3-20x_4+7x_5=59 \\ 2x_4+8x_5=-86 \end{cases}$

Вариант25 $\begin{cases} 12x_1-5x_2=148 \\ -3x_1-18x_2-8x_3=45 \\ -2x_2-16x_3-9x_4=-155 \\ -4x_3+18x_4-7x_5=11 \\ 4x_4-9x_5=3 \end{cases}$

Контрольное задание 2.

Методом простых итераций с погрешностью 0,001 решить СЛУ. N - совпадает с номером Вашей фамилии в журнале.

$$\begin{cases} (24+\frac{N}{2})x_1+2x_2+4x_3-9x_4=-9 \\ -6x_1-(27+\frac{N}{3})x_2-8x_3-6x_4=-76 \\ -4x_1+8x_2+(19+\frac{N}{4})x_3+6x_4=-79 \\ 4x_1+5x_2-3x_3-(13+\frac{N}{5})x_4=-70 \end{cases}$$

Контрольные вопросы.

1. К какому типу методов относится метод прогонки?

2. В чем заключается прямой и обратный ход в методе прогонки?

3. Как строится итерационная последовательность для решения СЛУ методом простой итерации?

4. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса?

Лабораторная работа № 5 Решение нелинейных уравнений.

Численное решение нелинейных уравнений вида $f(x)=0$ заключается в нахождении значений x, удовлетворяющих с заданной точностью ε данному уравнению, и состоит из следующих основных этапов:

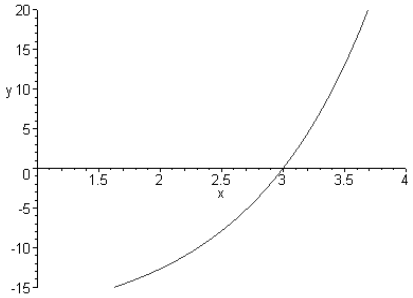
- Отделение (изоляция) корней уравнения.
- Уточнение с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.

Целью первого этапа является нахождение области отделения корня (О.О.К.), то есть отрезка $[a,b]$ из области определения функции $f(x)$, внутри которого содержится только один корень решаемого уравнения.

Определение. Отрезок $[a,b]$ из области определения функции непрерывной $f(x)$ будем называть областью отделения корня (О.О.К.) уравнений $f(x)=0$, если

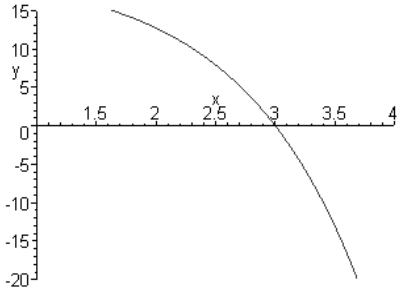
1) $f(a)\cdot f(b)<0$,
2) $f'(x)$ – сохраняет знак на этом отрезке,
3) $f''(x)$ – сохраняет знак на этом отрезке.

Из определения О.О.К. следует, что на отрезке $[a,b]$ поведение функции может быть описано одним из четырех вариантов. Разберем эти варианты.



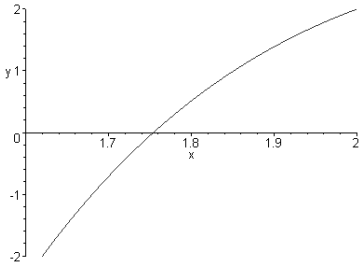
В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[2{,}5;3{,}5]$. Действительно, из графика видно, что

1) $f(2{,}5)\cdot f(3{,}5)<0$,
2) $f'(x)>0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x)>0$ сохраняет знак на этом отрезке



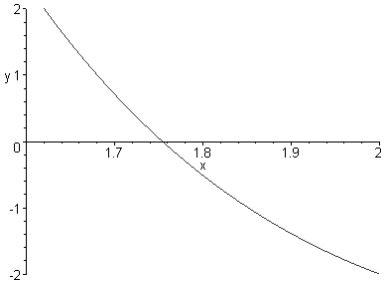
В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[2{,}5;3{,}5]$. Действительно, из графика видно, что

1) $f(2{,}5)\cdot f(3{,}5)<0$,
2) $f'(x)<0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x)<0$ сохраняет знак на этом отрезке



В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[1{,}7;1{,}8]$. Действительно, из графика видно, что

1) $f(1{,}7)\cdot f(1{,}8)<0$,
2) $f'(x)>0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x)<0$ сохраняет знак на этом отрезке



В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[1{,}7;1{,}8]$. Действительно, из графика видно, что

1) $f(1{,}7)\cdot f(1{,}8)<0$,
2) $f'(x)>0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x)>0$ сохраняет знак на этом отрезке.

Других вариантов нет.

Для нахождения О.О.К. на практике используют графический или аналитический способы.

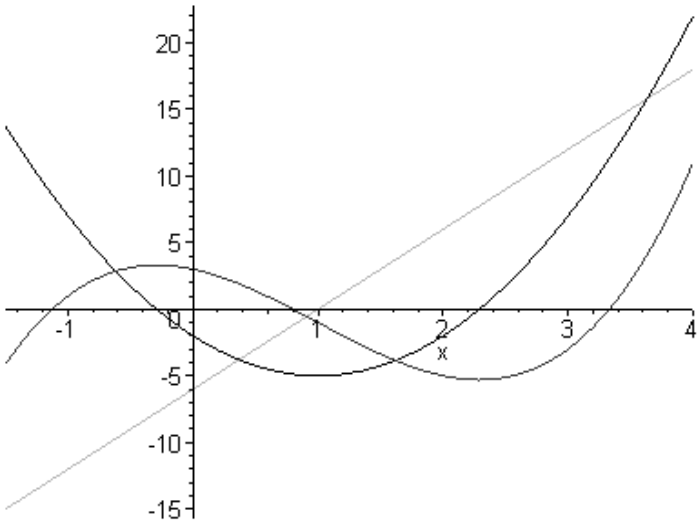
Задание 1. Используя графические возможности пакета Maple, найти отрезки отделяющие корни уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$.

Рассмотрим левую часть уравнения и построим графики функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$, ее первой и второй производных.

```
> restart; with(plots):

> f:=x->x^3-3*x^2-2*x+3;
> plot([f(x),diff(f(x),x),diff(f(x),x$2)],x=-
1.5..4,color=[red,black,green]);
```

$$f := x \to x^3 - 3x^2 - 2x + 3$$



Учитывая определение О.О.К. и анализируя поведение графиков функции и ее первой и второй производных, найдем искомые отрезки.

Отрезками, отделяющими корни, являются:

$[-1{,}2;-1{,}0]$, так как

1) $f(-1{,}2) \cdot f(-1{,}0) < 0$

2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке

3) $f''(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке

$[0{,}6;0{,}9]$, так как

1) $f(0{,}6) \cdot f(0{,}9) < 0$,

2) $f'(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке

3) $f''(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке

$[3{,}2;3{,}4]$, так как

1) $f(3{,}2) \cdot f(3{,}4) < 0$,

2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке

3) $f''(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке

Таким образом, при завершении первого этапа должны быть определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения $f(x)=0$.

Для уточнения корней с заданной точностью ε будем использовать итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности $\{x_n\}, n=0,1,2,\ldots$, сходящейся к искомому корню уравнения.

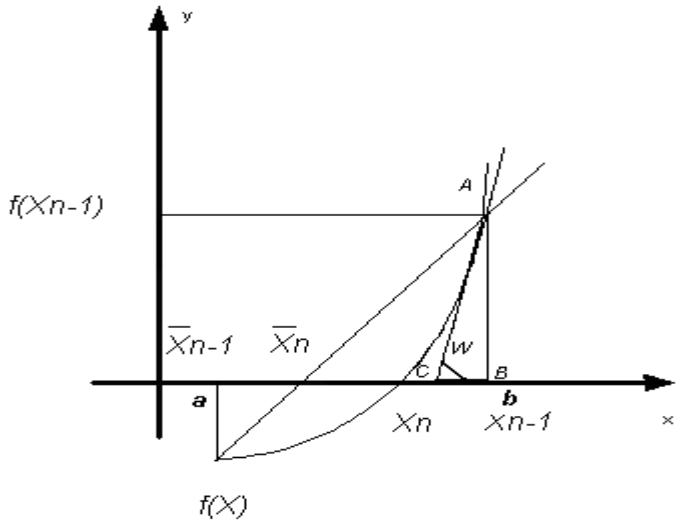
1. Комбинированный метод уточнения корней уравнения.

Теорема

Если $[a,b]$ О.О.К. уравнения $f(x)=0$ и в качестве начального приближения x_0 выбран тот из концов отрезка, для которого выполняется условия $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, то последовательность $\{x_n\}, n=1,2,\ldots$, члены которой находятся по формуле $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, сходится к корню этого уравнения, также как и последовательность $\{\bar{x}_n\}, n=0,1,2,\ldots$, $\bar{x}_n = b - f(b)^* \dfrac{b-\bar{x}_{n-1}}{f(b)-f(\bar{x}_{n-1})}$, где $f(b)\cdot f''(b)>0$, $\bar{x}_0$ - конец отрезка противоположный b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \Theta$, где $f(\Theta)=0$, $(\Theta\in[a,b])$.

В качестве условия окончания итераций используют формулу $|x_n - \bar{x}_n| \le \varepsilon$.

Геометрически, комбинированный метод (хорд и Ньютона) эквивалентен с одной стороны построению системы хорд, а с другой стороны системы касательных к дуге кривой $y=f(x)$ отрезка отделяющего корень.



Из прямоугольного треугольника ABC $tgW = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}-x_n}$

С другой стороны *(AC)* - касательная у графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_{n-1}; f(x_{n-1}))$, тогда, из геометрического смысла производной в точке, $tgW = f'(x_{n-1})$. Таким образом

$f'(x_{n-1}) = \dfrac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - x_n}$, отсюда выразим x_n:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Аналогичным образом, используя свойства подобия треугольников можно получить формулу метода хорд (см. лекции и практические занятия).

Задание 2. Уточнить наибольший корень заданного уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ комбинированным методом, с погрешностью 0.000001. Остановку процесса уточнения корня произвести в соответствии с условием $|x_n - \bar{x}_n| \le \varepsilon$.

```
> restart;
```

Задание 2. Уточнить наибольший корень заданного уравнения комбинированным методом, с погрешностью 0.000001. Остановку процесса уточнения корня произвести в соответствии с условием .

Решение.

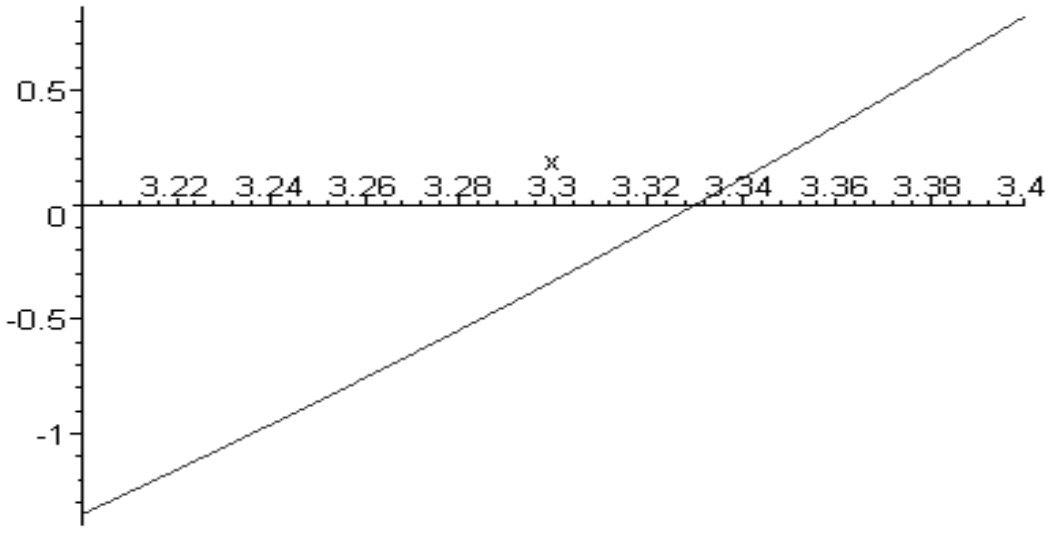
Рассмотрим на О.О.К. , задав функцию оператором

```
> f:=x->x^3-3*x^2-2*x+3;
```

$$f := x \to x^3 - 3x^2 - 2x + 3$$

Графически уточним О.О.К

```
> plot(f(x),x=3.2..3.4);
```



приступим к итерационному процессу в соответствии с комбинированным методом, используя формулы

$$\bar{x}_n = b - f(b) * \frac{b - \bar{x}_{n-1}}{f(b) - f(\bar{x}_{n-1})} \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

```
> f1:=x->3*x^2-6*x-2;
```

$$f1 := x \to 3\,x^2 - 6\,x - 2$$

Задаем начальное приближение метода Ньютона, неподвижную точку метода хорд, начальное приближение метода хорд и погрешность нахождения корня

```
> x[0]:=3.4; b:=3.4; x_[0]:=3.2;e:=0.000001;
```

$$x_0 := 3.4$$

$$b := 3.4$$

$$x\__0 := 3.2$$

$$e := .1\ 10^{-5}$$

В цикле осуществляем итерационный процесс комбинированного метода с оценкой погрешности нахождения корня. Остановка итерационного процесса осуществляется при выполнении неравенства q < e.

```
> for i from 1 by 1 to 20 do  x[i]:=x[i-1]-f(x[i-1])/f1(x[i-1]);
x_[i]:=b-f(b)*(b-x_[i-1])/(f(b)-f(x_[i-1])); q:=abs(x[i]-x_[i]); if
q>e then i else i:=20 end if; end do;
```

$$x_1 := 3.332899023$$

$$x\__1 := 3.324264706$$

$$q := .008634317$$

$$x_2 := 3.330063723$$

$$x\__2 := 3.329815248$$

$$q := .000248475$$

$$x_3 := 3.330058740$$

$$x\__3 := 3.330048534$$

$$q := .000010206$$

$$x_4 := 3.330058739$$

$x\_4 := 3.330058312$

$q := .427\,10^{-6}$

Таким образом, корень найден $x = x_3$ =3,330059 с точностью 10^{-6}

2 Метод простой итерации

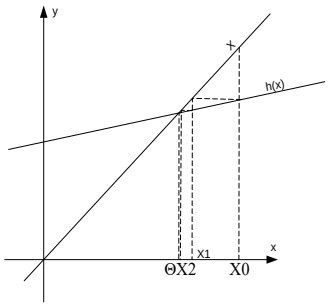
Теорема.

Если $[a,b]$– О.О.К. уравнения $f(x) = 0$ и:

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = h(x)$;
2. $\exists h'(x) для \forall x \in [a,b]$
3. $|h'(x)| < q < 1$ для $\forall\ x \in [a,b]$,

тогда последовательность $\{x_n\}, n = 0,1,2,...,$ члены которой находятся по формуле: $x_n = h(x_{n-1})$ сходиться к точному значению корня уравнения $f(x) = 0$, при любом начальном приближении x_0 из отрезка [a,b] т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$, где $f(\Theta) = 0$, $(\Theta \in [a,b])$.

Характер сходимости метода итераций:



Оценка сходимости метода простой итерации дается следующей формулой: $|\Theta - x_n| \le \frac{q}{q-1}|x_n - x_{n-1}|$, где $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |h'(x)| < 1,\ 0 < h'(x) < 1$

Отсюда следует, что процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства $|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$, где ε - заданная погрешность корня.

Построение уравнения удобного для создания итерационного процесса.

Пусть имеется уравнение $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{M} = 0, (M - const) \Leftrightarrow -\frac{f(x)}{M} = 0 \Leftrightarrow x = x - \frac{f(x)}{M}$. В качестве M выбирают $M = \begin{bmatrix} \max|f'(x)|, f' > 0 \\ -\max|f'(x)|, f' < 0 \end{bmatrix}$.

Итерационное уравнение будет иметь вид: $x = h(x)$, где $h(x) = x - \frac{f(x)}{M}$.

Найдем $h'(x)$: $h'(x)=1-\dfrac{f'(x)}{M}$.

Тогда $|h'(x)|=|1-\dfrac{f'(x)}{M}|\le 1-\dfrac{m}{M}=q<1$, если $m=\begin{bmatrix}\min|f'(x)|, f'>0\\ -\min|f'(x)|, f'<0\end{bmatrix}$

Следовательно, в качестве q можно выбрать $q=1-\dfrac{m}{M}$

Задание 4. Уточнить оставшиеся корни уравнения $x^3-3x^2-2x+3=0$ методом простой итерации, предварительно приведя его к виду удобному для итераций. Погрешность 0.00001. Решение.

Приведем уравнение $x^3-3x^2-2x+3=0$ к виду $x=h(x)$, $h(x)=x-\dfrac{f(x)}{M}$. , а

$f(x)=x^3-3x^2-2x+3$

1). $[-1{,}2;-1{,}0]$-О.О.К

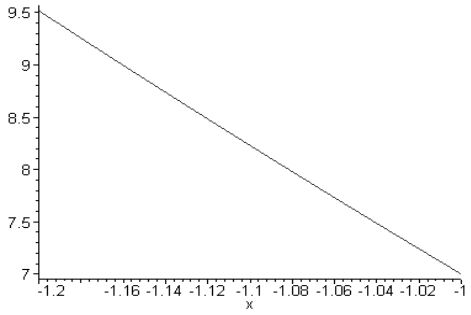
Найдем M, m,q, для этого построим графики $f'(x)$ и $|f'(x)|$ на этом отрезке.

```
> restart;with(plots):f:=x->x^3-3*x^2-2*x+3;f1:=diff(f(x),x);
```

$$f := x \to x^3 - 3x^2 - 2x + 3$$

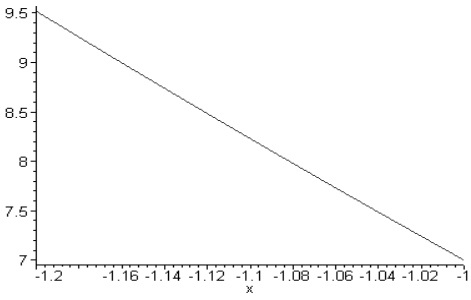
$$f1 := 3x^2 - 6x - 2$$

```
> plot(f1,x=-1.2..-1);
```



По графику видно, что $f'(x)>0$ на $[-1{,}2;-1{,}0]$

```
> plot(abs(f1),x=-1.2..-1);
```



Из условий $m = \begin{bmatrix} \min |\, f'(x)\,|,\ f' > 0 \\ -\min |\, f'(x)\,|,\ f' < 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \max |\, f'(x)\,|,\ f' > 0 \\ -\max |\, f'(x)\,|,\ f' < 0 \end{bmatrix}$ и графика $|f'(x)|$ найдем M, m, q

```
> m:=7;M:=9.5; q:=1-m/M;
```

$$m := 7$$

$$M := 9.5$$

$$q := .2631578947$$

Запишем $h(x) = x - \frac{f(x)}{M}$.

```
> h:=x-(x^3-3*x^2-2*x+3)/M;
```

$$h := 1.210526316\,x - .1052631579\,x^3 + .3157894737\,x^2 - .3157894737$$

Выберем начальное приближение. Например $x_0 = -1$

```
> x[0]:=-1;e:=.00001;
```

$$x_0 := -1$$

$$e := .00001$$

```
> h:=x->1.210526316*x-.1052631579*x^3+.3157894737*x^2-.3157894737;
```

$$h := x \to 1.210526316\,x - .1052631579\,x^3 + .3157894737\,x^2 - .3157894737$$

Построим алгоритм, соответствующий формуле $x_n = h(x_{n-1})$

```
> for i from 1 by 1 to 20 do
>     x[i]:=h(x[i-1]); abs(x[i]-x[i-1]);
>       if abs(x[i]-x[i-1])>e*(1-q)/q then i else i:=20 end if; end
do;
```

$$x_1 := -1.105263158$$

$$.105263158$$

$$x_2 := -1.125843111$$

$$.020579953$$

$$x_3 := -1.128167994$$

$$.002324883$$

$$x_4 := -1.128394986$$

$$.000226992$$

$$x_5 := -1.128416758$$

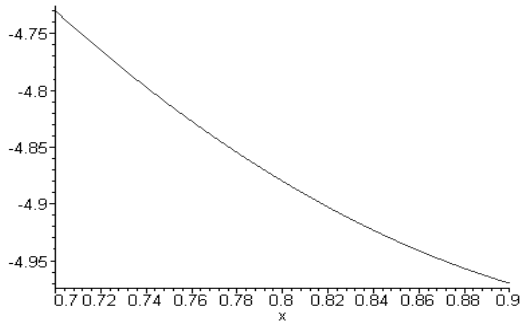
$$.000021772$$

Таким образом корень найден $x_5 := -1.128416758$ с заданной точностью 0.00001

2) $[0{,}6;0{,}9]$ - О.О.К

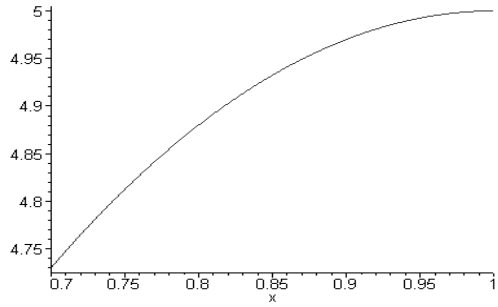
Найдем $M,\ m,q$, для этого построим графики $f'(x)$ и $|f'(x)|$ на этом отрезке.

```
> plot(3*x^2-6*x-2,x=.7..0.9);
```



По графику видно, что $f'(x) < 0$ на $[0{,}6;0{,}9]$

```
> plot(abs(f1),x=.7...9);
```



Из условий $m = \begin{bmatrix} \min|f'(x)|,\ f'>0 \\ -\min|f'(x)|,\ f'<0 \end{bmatrix}$ и $M = \begin{bmatrix} \max|f'(x)|,\ f'>0 \\ -\max|f'(x)|,\ f'<0 \end{bmatrix}$ и графика $|f'(x)|$ найдем M, m,q

```
> m:=-4.73;M:=-5;q:=1-m/M;
```

$$m := -4.73$$

$$M := -5$$

$$q := .0540000000$$

Запишем $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$.

```
> h:=x-(x^3-3*x^2-2*x+3)/M;
```

$$h := \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}$$

В качестве начального приближения выберем 0,7

```
> x[0]:=.7;e:=.00001;
```

$$x_0 := .7$$

$$e := .00001$$

```
> h:=x->3/5*x+1/5*x^3-3/5*x^2+3/5;
```

$$h := x \to \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}$$

Построим алгоритм, соответствующий формуле $x_n = h(x_{n-1})$

```
> for i from 1 by 1 to 20 do
>     x[i]:=h(x[i-1]); abs(x[i]-x[i-1]);
>       if abs(x[i]-x[i-1])>e*(1-q)/q then i else i:=20 end if; end
do;
```

$$x_1 := .7946000000 \qquad .0946000000$$

$$x_2 := .7982668693 \qquad .0036668693$$

$$x_3 := .7983580434 \qquad .0000911741$$

Таким образом корень найден $x_3 := .7983580434$ с заданной точностью 0.00001

Контрольное задание.

1. Найти отрезки отделяющие корни данного уравнения (О.О.К.) (Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей фамилии по журналу).
2. Уточнить наибольший корень заданного уравнения комбинированным методом, с погрешностью 0.00001.
3. Уточнить оставшиеся корни уравнения, методом простой итерации, предварительно приведя его к виду удобному для итераций. Погрешность 0.00001.

в.1 $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$

в.2 $x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$

в.3 $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$

в.4 $x^3 - 12x + 6 = 0$

в.5 $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$

в.6 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$

в.7 $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$

в.8 $x^3 - 3x^2 - 2{,}5 = 0$.

в.9 $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

в.10 $x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0$.

в.11 $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$.

в.12 $x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$.

в.13 $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$.

в.14 $x^3 - 12x^2 + 10 = 0$.

в.15 $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

в.16 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$.

в.17 $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$.

в.18 $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$.

в.19 $x^3 - 12x - 5 = 0$.

в.20 $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$.

в.21 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$.

в.22 $2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$.

в.23 $x^3 - 3x^2 + 1{,}5 = 0$.

в.24 $x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0$.

в.25 $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$.

Контрольные вопросы.

1. **В** чем заключается этап отделения корней?
2. Будет ли достаточно условия $f(a) \cdot f(b) < 0$, чтобы утверждать, что на $[a,b]$ $f(x) = 0$ имеет а) корень?

   б) единственный корень? Почему?
3. Геометрический смысл метода хорд. Изобразить на рисунке.
4. Геометрический смысл метода Ньютона. Изобразить на рисунке.
5. Геометрический смысл метода простых итераций. Изобразить на рисунке.
6. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения методом Ньютона?
7. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения методом хорд?
8. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения комбинированным методом ?
9. Каковы достаточные условия сходимости итерационной последовательности уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$, содержащем этот корень?
10. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения методом простой итерации?

Лабораторная работа № 6.

Численное решение задачи Коши.

Основные понятия.

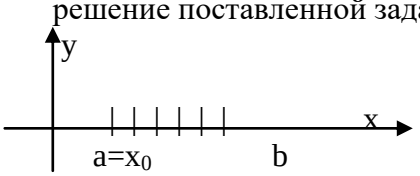
Уравнения первого порядка имеют вид $y' = f(x, y)$, где f(x,y) – непрерывная функция в области D от x,y.
Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит области D.

Задача Коши:

Найти такое решение y=y(x) этого уравнения, которое удовлетворяет условию $y(x_0)= y_0$, т.е. найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку M_0.

Постановка задачи Коши при численном решении дифференциальных уравнений.

Пусть дано $y' = f(x, y)...(2)$ и $y(x_0) = y_0, M_0(x_0, y_0)$. Требуется найти приближённое решение поставленной задачи на отрезке [a,b], где $a=x_0$.



Разбиваем отрезок *[a,b]* равноотстоящими точками $x_1 < x_2 < ... < x_n = b, x_{i+1} = x_i + h$, где h – шаг разбиения.
Ищем приближённое значение решения задачи Коши в точках x_i.
Если y_i найдено, то следующие значение y_{i+1} получаем по формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $i = 0,1,...,(n-1)$. Δy_i в каждом методе находится по формулам, соответствующим выбранному методу.
Решение получаем в виде таблицы

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
…	…
x_n	y_n

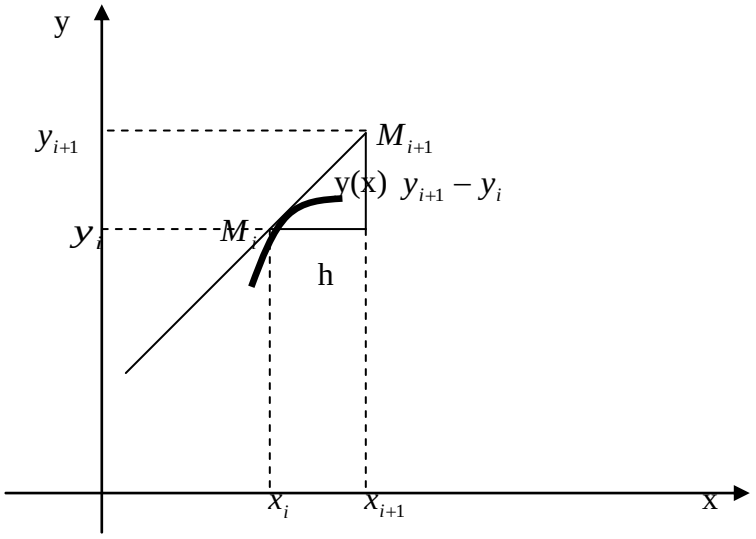
Метод Эйлера.

$y' = f(x, y) : M_0(x_0, y_0)$ $\quad y(x_0) = y_0$
В методе Эйлера: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $\quad \Delta y_i = h \cdot f(x_i; y_i) \quad i = 0,1,...,(n-1)$
Рассмотрим метод Эйлера:

Пусть $y(x)$ – точное решение задачи Коши.

В точке $M_i(x_i, y_i)$ $y'(x_i) = f[x_i, y(x_i)]$.

Известно, что $y'(x_i) = tg\alpha$ - угловой коэффициент касательной к интегральной кривой y(x) в точке $M_i(x_i, y_i)$.

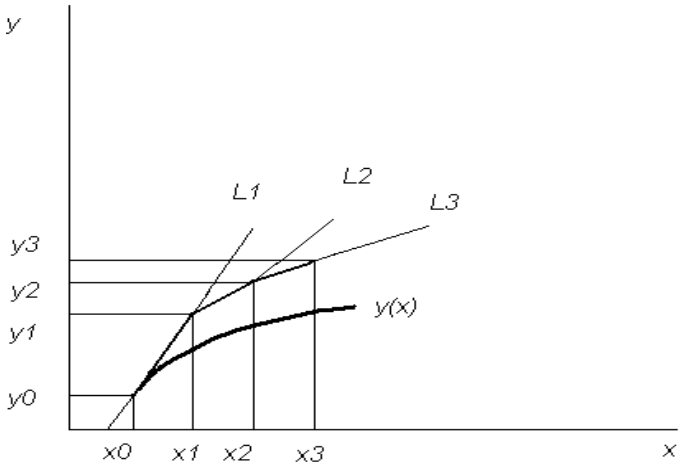


$tg\alpha = f(x_i, y_i)$

С другой стороны: $tg\alpha = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

Тогда: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i) \qquad i = 0,1,...,(n-1)$

Таким образом, вместо искомой интегральной кривой $y(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, рассмотрим отрезок $M_i M_{i+1}$ касательной к $y(x)$ в точке M_i.В случае небольшого шага h график функции и график касательной не успевают существенно разойтись друг от друга и можно в качестве значения решения в x_{i+1} принять значение касательной y_{i+1} вместо значения неизвестного точного решения. В результате многократного повторения этого действия на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}] \qquad i = 0,1,...,(n-1)$, получаем ломанную (см. рис.).



Метод Эйлера является простейшим методом и даёт грубое приближение. Более того, этот метод даёт систематическое отклонение искомого решения при переходе от одного шага к следующему. Наиболее приемлемым для практики методом оценки точности является в данном случае способ двойного счета – с шагом h и с шагом $\frac{h}{2}$.

ПРИМЕР 1.

Изучить работу метода Эйлера на отрезке [0,2] на примере задачи Коши вида

$\frac{dy}{dx} = 2xy,\ y(0) = 1.$

С этой целью найти точное решение задачи средствами Maple и приближенное решение с шагом 0.1, 0.02, 0.01.

Результаты сравнить графически. Сделать выводы.

Решение.

```
> restart:with(plots):
```

1. Зададим массивы для численного решения

```
> y1:=array(1..200,[]);x1:=array(1..200,[]);
```

$$y1 := \text{array}(1 .. 200, [\ ])$$

$$x1 := \text{array}(1 .. 200, [\ ])$$

Зададим правую часть дифференциального уравнения.

```
> f:=(x,u)->2*x*u;
```

$$f := (x, u) \to 2\,u\,x$$

Зададим дифференциальное уравнение.

```
> ode:=diff(y(x),x)=f(x,y(x));
```

$$ode := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = 2\,y(x)\,x$$

Зададим начальное условие.

```
> iq:=y(0)=1;
```

$$iq := y(0) = 1$$

Найдем точное решение дифференциального уравнения.

```
> dsolve({ode,iq},y(x));
```

$$y(x) = \mathbf{e}^{(x^2)}$$

Зададим выражение для построения графика.

```
> f1:=plot(exp(x^2),x=0..2,y=0..20):
```

Найдем приближенное решение с шагом 0.1 по формулам

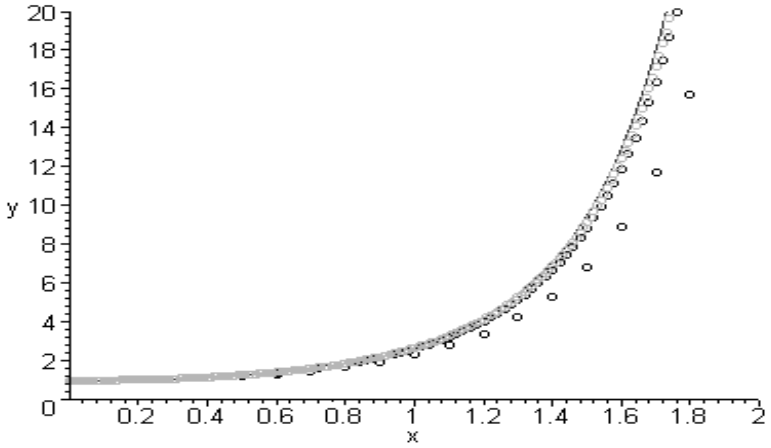
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i) \qquad i = 0,1,...,(n-1) \text{ и } x_{i+1} = x_i + h$$

```
> h:=.1;y1[1]:=1:x1[1]:=0:
```

$$h := .1$$

```
> for i from 1 to 20 do
y1[i+1]:=y1[i]+h*f(x1[i],y1[i]):x1[i+1]:=x1[i]+h:end do:
```
Зададим выражение для построения графика решения
```
> l := [[ x1[m], y1[m]]
$m=1..20]:f2:=plot(l,x=0..2,y=0..20,style=point,symbol=circle,color
=black):
```
Найдем приближенное решение с шагом 0.02 и получим выражение для построения графика.
```
> h:=.02;y1[1]:=1:x1[1]:=0:
for i from 1 to 100 do
y1[i+1]:=y1[i]+h*f(x1[i],y1[i]):x1[i+1]:=x1[i]+h:end do:
l := [[ x1[m1], y1[m1]] $m1=1..100]:
   f3:=plot(l,x=0..2,y=0..20,style=point,symbol=circle,color=blue):
```
$h := .02$

Найдем приближенное решение с шагом 0.01 и получим выражение для построения графика.
```
> h:=.01;y1[1]:=1:x1[1]:=0:
for i from 1 to 199 do
y1[i+1]:=y1[i]+h*f(x1[i],y1[i]):x1[i+1]:=x1[i]+h:end do:
l := [[ x1[m1], y1[m1]] $m1=1..200]:
  f4:=plot(l,x=0..2,y=0..20,style=point,symbol=circle,color=green):
```
$h := .01$

Построим графики всех решений.
```
> plots[display]({f1,f2,f3,f4});
```


Выводы:
1. Решение с большим шагом может приводить к большим погрешностям;
2. Уменьшение шага на порядок приводит к резкому уменьшению погрешности результатов.
3. Для достаточно малого шага отличие точного и приближенного решений незначительное.

Модифицированный метод Эйлера

Существует несколько модификаций метода Эйлера, которые дают более точные приближения искомого решения. Рассмотрим один из них.

Пусть дано $y' = f(x, y)$ и отрезок $[x_0, x_n]$, $M_0(x_0, y_0)$, h – шаг разбиения.
Вычисления проводят по схеме

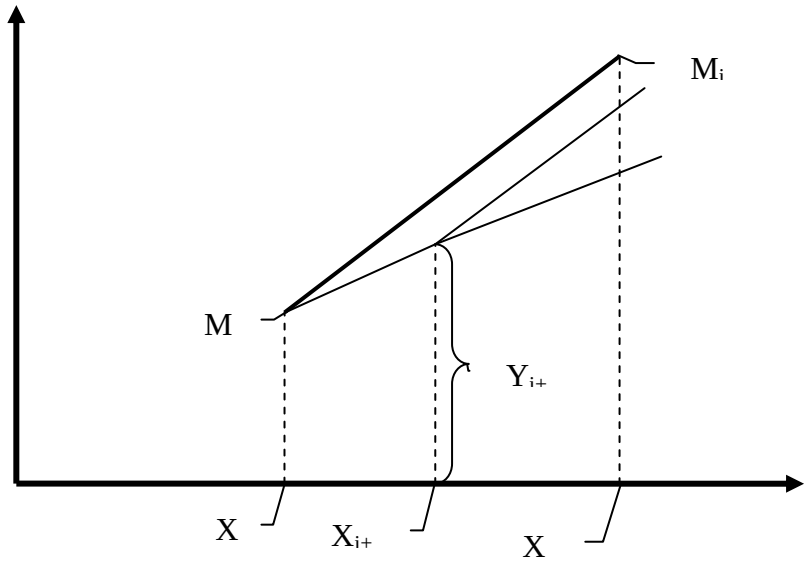
$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = h \cdot f(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}), \text{где}$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i)$$

Рассмотрим геометрический смысл



Сначала с шагом $\frac{h}{2}$ находим $y_{i+h/2}$ т.е. точку ($x_{i+h/2}$, $y_{i+h/2}$) (как в методе Эйлера). Определяем в этой точке новое направление α_i. Затем проводим отрезок из точки M_i именно в этом новом направлении в точку M_{i+1}

Точность полученного метода примерно в 3 раза выше обычного метода Эйлера.

ПРИМЕР 2.

На примере предыдущего задания изучить работу модифицированного метода Эйлера, сравнивая точное решение задачи с приближенным, подсчитанным соответственно с шагом h=0.2, 0.1, 0.05.

Решение.

> **restart: with(plots):**

Зададим массивы для численного решения

> **y1:=array(1..200,[]);x1:=array(1..200,[]);**

y1 := array(1 .. 200, [ ])

$$x1 := \text{array}(1 .. 200, [\ ])$$

Зададим правую часть дифференциального уравнения.

```
> f:=(x,u)->2*x*u;
```

$$f := (x, u) \to 2\,u\,x$$

Зададим дифференциальное уравнение.

```
> ode:=diff(y(x),x)=f(x,y(x));
```

$$ode := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = 2\,y(x)\,x$$

Зададим начальное условие.

```
> iq:=y(0)=1;
```

$$iq := y(0) = 1$$

Найдем точное решение дифференциального уравнения.

```
> dsolve({ode,iq},y(x));
f1:=plot(exp(x^2),x=0..2,y=0..20):
```

$$y(x) = \mathbf{e}^{(x^2)}$$

Найдем приближенное решение с шагом 0.2, по формулам

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)) \qquad i = 0,1,...,(n-1) \text{ и } x_{i+1} = x_i + h$$

```
> h:=.2;y1[1]:=1:x1[1]:=0:
```

$$h := .2$$

```
> for i from 1 to 20 do
y1[i+1]:=y1[i]+h*f(x1[i]+h/2,y1[i]+f(x1[i],y1[i])*h/2):x1[i+1]:=x1[
i]+h:end do:
```

Зададим выражение для построения графика решения

```
> l := [[ x1[m], y1[m]] $m=1..20]:
f2:=plot(l,x=0..2,y=0..20,style=point,symbol=circle,color=black):
```

Аналогично найдем приближенное решение с шагом 0.1и получим выражение для построения графика.

```
> h:=.1;y1[1]:=1:x1[1]:=0:
for i from 1 to 100 do
y1[i+1]:=y1[i]+h*f(x1[i]+h/2,y1[i]+f(x1[i],y1[i])*h/2):x1[i+1]:=x1[
i]+h:end do:
l := [[ x1[m1], y1[m1]] $m1=1..100]:
   f3:=plot(l,x=0..2,y=0..20,style=point,symbol=circle,color=blue):
```

$$h := .1$$

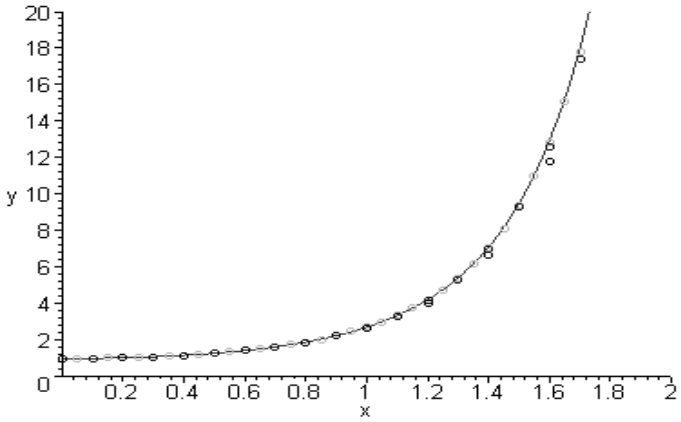
Найдем приближенное решение с шагом 0.05 и получим выражение для построения графика.

```
> h:=.05;y1[1]:=1:x1[1]:=0:
for i from 1 to 199 do
y1[i+1]:=y1[i]+h*f(x1[i]+h/2,y1[i]+f(x1[i],y1[i])*h/2):x1[i+1]:=x1[
i]+h:end do:                                                l := [[
x1[m1], y1[m1]] $m1=1..200]:
  f4:=plot(l,x=0..2,y=0..20,style=point,symbol=circle,color=green):
```

$h := .05$

Построим графики всех решений.

```
> plots[display]({f1,f2,f3,f4});
```



Метод Рунге-Кутта.

Метод Рунге – Кутта четвертого порядка является одним из самых широко используемых методов решения задачи Коши.

Пусть дано $y' = f(x, y)$ и отрезок $[x_0, x_n]$, $M_0(x_0, y_0)$, h – шаг разбиения.

Вычисления проводят по схеме:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4)$$

$$K_1 = h \cdot f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_1}{2})$$

$$K_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = h \cdot f(x_i + h; y_i + K_3)$$

Для оценки **погрешности решения** при переходе от точки x_i к точке x_{i+1} выбирают значение шага h и дважды рассчитывают решение в точке x_{i+1} : один раз с шагом h, другой раз – с шагом $2h$. Рассчитывается величина $R^h = \left| y^{2h}_{i+1} - y^{h}_{i+1} \right| / 15$ и сравнивается с заданной погрешностью ε. Если $R^h < \varepsilon$, то можно продолжить вычисления с тем же шагом, в противном случае необходимо вернуться к решению в точке x_i,уменьшив шаг и повторить вычисления.

В **Maple 6** реализован метод Рунге – Кутта 4 порядка **`method=rkf45`** (установлен по умолчанию). Для того, чтобы найти численное решение задачи Коши или краевой задачи в команде **`dsolve`** следует указать параметр **`numeric`** . Тогда команда решения дифференциального уравнения будет иметь вид

ode:=dsolve(eq,vars, type=numeric, method=rkf45): где **eq** - уравнения, **vars** - список неизвестных функций. График численного решения можно построить с помощью команды **odeplot(ode,[x,y(x)],x1..x2);**

ПРИМЕР 3.

$\frac{dy}{dx} = 2xy$, $y(0) = 1$.

на отрезке [0,2]

Решение.

```
> restart:with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

➢ **ode:=dsolve({diff(y(x),x)=2*x*y(x),y(0)=1},y(x),numeric);**

ode := **proc**(*rkf45_x*) ... **end proc**

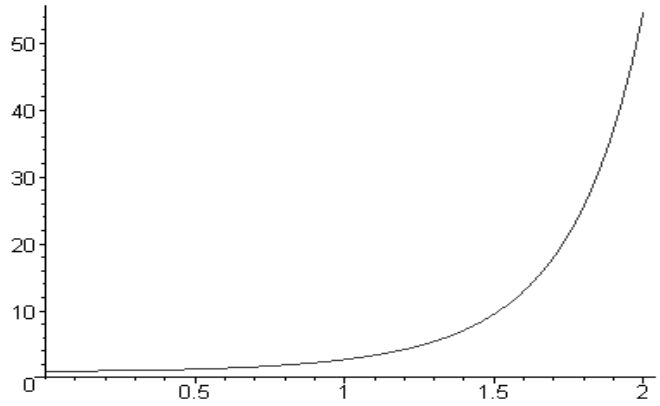
В строке вывода появилось сообщение о том, что при решении использован метод Рунге – Кутта *(rkf45)* . Если требуется получить **решение при фиксированном значении *x*,** например, при *x=0,1*, то следует набрать:

```
> ode(.1);
```

[$x = .1$, $y(x) = 1.01005017261491115$]

Построим график численного решения

➢ **odeplot(ode,[x,y(x)],0..2);**



КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1.

Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера на отрезке[0,2;1,2] с шагом 0,1 при начальном условии y(0,2)=0,25. Построить графики решений.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2.

Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта четвертого порядка на отрезке[0,2;1,2] при начальном условии y(0,2)=0,25

1) используя в **Maple 6 method=rkf45.** Построить график решения.

2) Оценить погрешность решения ε в точке *x=1,2*.

ВАРИАНТ №1 $y' = 0{,}133(x^2 + \sin 2x) + 0{,}872y$

ВАРИАНТ №2 $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 1{,}5x) + 1{,}283y$

ВАРИАНТ №3 $y' = 0{,}158(x^2 + \sin 0{,}8x) + 1{,}164y$

ВАРИАНТ №4 $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}7x) + 0{,}754y$

ВАРИАНТ №5 $y' = 0{,}221(x^2 + \sin 1{,}2x) + 0{,}452y$

ВАРИАНТ №6 $y' = 0{,}163(x^2 + \cos 0{,}4x) + 0{,}635y$

ВАРИАНТ №7 $y' = 0{,}218(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}718y$

ВАРИАНТ №8 $y' = 0{,}145(x^2 + \cos 0{,}5x) + 0{,}842y$

ВАРИАНТ №9 $y' = 0{,}213(x^2 + \sin 1{,}8x) + 0{,}368y$

ВАРИАНТ №10 $y' = 0{,}127(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}573y$

ВАРИАНТ №11 $y' = 0{,}232(x^2 + \sin 1{,}4x) + 1{,}453y$

ВАРИАНТ №12 $y' = 0{,}417(x^2 + \cos 0{,}8x) + 0{,}972y$

ВАРИАНТ №13 $y' = 0{,}324(x^2 + \sin 1{,}5x) + 1{,}612y$

ВАРИАНТ №14 $y' = 0{,}263(x^2 + \cos 1{,}2x) + 0{,}453y$

ВАРИАНТ №15 $y' = 0{,}372(x^2 + \sin 0{,}2x) + 0{,}758y$

ВАРИАНТ №16 $y' = 0{,}343(x^2 + \cos 0{,}4x) + 1{,}315y$

ВАРИАНТ №17 $y' = 0{,}276(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}988y$

ВАРИАНТ №18 $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}6x) + 1{,}534y$

ВАРИАНТ №19 $y' = 0{,}258(x^2 + \sin 0{,}4x) + 0{,}724y$

ВАРИАНТ №20 $y' = 0{,}317(x^2 + \cos 1{,}4x) + 1{,}344y$

ВАРИАНТ №21 $y' = 0{,}166(x^2 + \sin 1{,}1x) + 0{,}883y$

ВАРИАНТ №22 $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 0{,}9x) + 1{,}213y$

ВАРИАНТ №23 $y' = 0{,}188(x^2 + \sin 1{,}5x) + 0{,}885y$

ВАРИАНТ №24 $y' = 0{,}314(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}772y$

ВАРИАНТ №25 $y' = 0{,}418(x^2 + \sin 1{,}2x) + 1{,}344y$

Лабораторная работа №7
Методы решения краевых задач
Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Краевые задачи в электромеханике возникают, как правило, при моделировании установившихся состояний электромагнитного или теплового полей в средах, характеризующихся скачкообразным изменением физических свойств: вблизи краев сердечников, вблизи поверхности корпуса, в межполюсном пространстве, внутри паза и т.п. Поскольку поля электрических машин описываются уравнениями второго порядка (см. главы 4,5 пособия), ниже рассматриваются методы решения таких уравнений.

7.1 Краевая задача для дифференциальных уравнений, ее сведение к двум задачам Коши

Краевой задачей для линейного дифференциального уравнения второго порядка называют задачу вида:

$$\left.\begin{aligned} l(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ l_1(y)_{x=0} = \alpha y(0) + \beta y'(0) = A \\ l_2(y)_{x=l} = \gamma y(l) + \delta y'(l) = B \end{aligned}\right\}, \qquad (3.35)$$

где *p(x), q(x), y(x), f(x)* - достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на отрезке [0,l] функции, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – постоянные коэффициенты.

Одним из методов решения краевой задачи является метод ее сведения к двум задачам Коши. Метод базируется на том, что искомое решение представляют в виде:

$$y(x) = U(x) + C \cdot V(x). \qquad (3.36)$$

Подстановка (3.36) в (3.35) приводит к ДУ:

$$U'' + p(x)U' + q(x)U + C \cdot (V'' + p(x)V' + q(x)V) = f(x) \qquad (3.37)$$

Потребуем, чтобы $V(x)$ удовлетворяла ЛОДУ. Тогда функция $U(x)$ будет удовлетворять соответствующему ЛНДУ:

$$V'' + p(x)V' + q(x)V = 0; \qquad (3.38)$$

$$U'' + p(x)U' + q(x)U = f(x) \qquad (3.39)$$

Подстановка (3.38), (3.39) в краевые условия приводит к системе выражений для определения начальных условий и константы *C*:

$$\alpha \cdot U(0) + \beta \cdot U'(0) + C \cdot (\alpha \cdot V(0) + \beta \cdot V'(0)) = A \qquad (3.40)$$

$$\alpha \cdot U(l) + \beta \cdot U'(l) + C \cdot (\alpha \cdot V(l) + \beta \cdot V'(l)) = B \qquad (3.41)$$

Получим из (3.40) начальные условия, а формулу для определения коэффициента *C* из (3.41). Возьмем значение функции $V(0) = 1$. Тогда для того, чтобы *C* не учитывалась в определении начальных условий, необходимо чтобы скобка в выражении (3.41) обратилась в ноль. Для этого достаточно положить $V'(0) = -\alpha/\beta, \quad \beta \neq 0$. Таким образом, для ЛОДУ имеем задачу Коши:

$$\left.\begin{array}{l} V'' + p(x) \bullet V' + q(x) \cdot V = 0 \\ V(0) = 1,\ V'(0) = -\alpha/\beta, \beta \neq 0 \end{array}\right\}. \qquad (3.42)$$

Для неоднородного ДУ достаточно положить $U(0) = A/\alpha, \alpha \neq 0$, откуда $U'(0) = 0$. Записываем вторую задачу Коши:

$$\left.\begin{array}{l} U'' + p(x) \bullet U' + q(x) \cdot U = f(x) \\ U(0) = A/\alpha, \alpha = 0, U'(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.43)$$

Таким образом, краевая задача для дифференциального уравнения свелась к двум задачам Коши для линейных ДУ второго порядка. После того как решение задач Коши найдено численно или аналитически, найдем константу *C*. Для этого воспользуемся условием (3.41), из которого следует, что:

$$C = \frac{B - \gamma \cdot U(l) - \delta \cdot U'(l)}{\gamma \cdot V'(l) + \delta \cdot V'(l)}. \qquad (3.44)$$

Линейная комбинация (3.36) с учетом решений (3.42)-(3.44) будет искомым решением.

7.2 Сведение неоднородных краевых условий к однородным. Метод коллокаций

Пусть имеется краевая задача (3.35) с неоднородными краевыми условиями.

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) \\ \alpha y(0)+\beta y'(0) = A \\ \gamma y(l)+\delta y'(l) = B \end{cases}.$$

При подборе системы линейно-независимых функций, используемых при аналитическом построении решения, желательно иметь однородные краевые условия. Преобразуем неоднородные краевые условия в однородные при помощи замены переменных:

$$y = \tilde{y} + kx + b.$$

Константы k, b подберем с учетом краевых условий из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\,\tilde{y}(0)+\beta\,\tilde{y}'(0)+\alpha(0+b)+\beta k = A \\ \gamma\,\tilde{y}(l)+\delta\tilde{y}'(l)+\gamma(kl+b)+k\delta = B \end{cases}.$$

Потребуем, чтобы k, b были решением системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha b+\beta k = A \\ \gamma b+(\gamma l+\delta)k = B \end{cases}.$$

Тогда

$$b = \frac{\begin{vmatrix} A & \beta \\ B & \gamma l+\delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma l+\delta \end{vmatrix}},\ k = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & A \\ \gamma & B \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Первая и вторая производная решения приобретают вид:

$$y' = \tilde{y}' + k, \quad y'' = \tilde{y}''$$

и исходная краевая задача превращается следующую задачу с однородными краевыми условиями:

$$l(\tilde{y}) = \tilde{y}''+p(x)(\tilde{y}'+k)+q(x)(\tilde{y}+kx+b)) = f^*(x), \tag{3.45}$$

$$l_1(\tilde{y})_{x=0} = \alpha\,\tilde{y}(0)+\beta\,\tilde{y}'(0) = 0, \tag{3.46}$$

$$l(\tilde{y})_{x=l} = \gamma\,\tilde{y}(l)+\delta\,\tilde{y}'(l) = 0, \tag{3.47}$$

$$f^*(x) = f(x) - p(x)k - q(x)(kx + b). \qquad (3.48)$$

Рассмотрим метод построения приближенного решения поставленной краевой задачи в аналитической форме записи, называемый методом коллокаций (от англ. collocation - . выровненное размещение).

Пусть имеется система линейно независимых функций

$$\{\varphi_i(x)\},\ i=1..n,$$

каждая их которых удовлетворяет краевым условиям (3.46) и (3.47). Если решение задачи (3.45)-(3.48) представить в виде:

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \qquad (3.49)$$

то, в силу линейности краевых условий, они будут удовлетворены. Но на всем интервале разность между левой и правой частями дифференциального уравнения не будет равна нулю

$$l(\tilde{y}) - f^*(x) \neq 0.$$

Невязка решения дифференциального уравнения

$$\Psi(x) = l(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)) - f^*(x)$$

содержит n неизвестных констант c_i.

Приравнивая невязку $\Psi(x)$ к нулю в n внутренних точках интервала, получаем систему из n линейных алгебраических уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_1)) = f^*(x_1) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_2)) = f^*(x_2), \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_n)) = f^*(x_n), \end{array}\right\}, \qquad (3.50)$$

записанную относительно неизвестных констант. После определения констант из системы (3.50) будет построено приближенное решение однородной краевой задачи в форме (3.49).

Решение исходной неоднородной задачи получается добавлением к функции $\tilde{y}$ линейной функции $kx+b$:

$$y \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) + kx + b.$$

Пример решения краевой задачи в среде Maple приведен ниже.

Пример 7.1. На отрезке [0,1] решить методом коллокаций краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &y'' + x \cdot y' + x^2 \cdot y = x(x-1) \\ &y(0) = 0, y(1) = 0 \end{aligned}.$$

Возьмем для построения решения три линейно независимые функции, удовлетворяющие краевым условиям.

```
> restart:

>x:='x':y:=unapply(a1*x*(x-1)+a2*x^2*(x-1)+a3*x^3*(x-
1),x);#Построение приближенного решения, удовлетворяющего
краевым условиям, в виде суммы трех слагаемых
```

$$y := x \to a1\, x\,(x-1) + a2\, x^2\,(x-1) + a3\, x^3\,(x-1)$$

```
>nv:=unapply(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-
1),x);#Задание функции невязки
```

$$\begin{aligned} nv := x \to\ & 2\, a1 + 2\, a2\,(x-1) + 4\, a2\, x + 6\, a3\, x\,(x-1) + 6\, a3\, x^2 \\ & + x\,(a1\,(x-1) + a1\, x + 2\, a2\, x\,(x-1) + a2\, x^2 + 3\, a3\, x^2\,(x-1) + a3\, x^3) \\ & + x^2\,(a1\, x\,(x-1) + a2\, x^2\,(x-1) + a3\, x^3\,(x-1)) - x\,(x-1) \end{aligned}$$

```
>l1:=nv(1/4);l2:=nv(1/2);l3:=nv(3/4);#  нахождение значений
невязки в точках коллокации
```

$$l1 := \frac{477}{256}\, a1 - \frac{595}{1024}\, a2 - \frac{3203}{4096}\, a3 + \frac{3}{16}$$

$$l2 := \frac{31}{16}\, a1 + \frac{27}{32}\, a2 - \frac{9}{64}\, a3 + \frac{1}{4}$$

$$l3 := \frac{581}{256}\, a1 + \frac{2623}{1024}\, a2 + \frac{8973}{4096}\, a3 + \frac{3}{16}$$

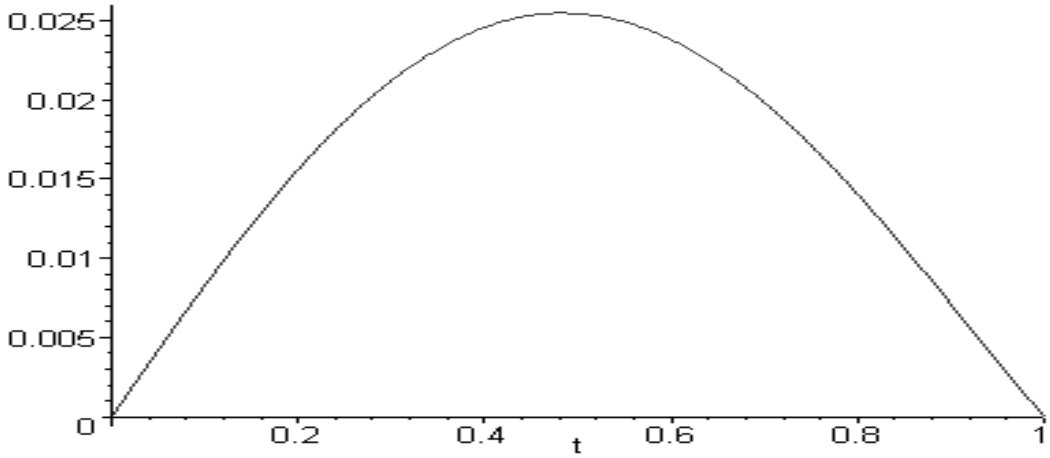
```
>  s2:=solve({l1=0,l2=0,l3=0},{a1,a2,a3});assign(s2);#Составление
и решение системы линейных уравнений
```

$$s2 := \{a3 = \frac{14949184}{147083039}, a2 = \frac{-12533312}{147083039}, a1 = \frac{-12435380}{147083039}\}$$

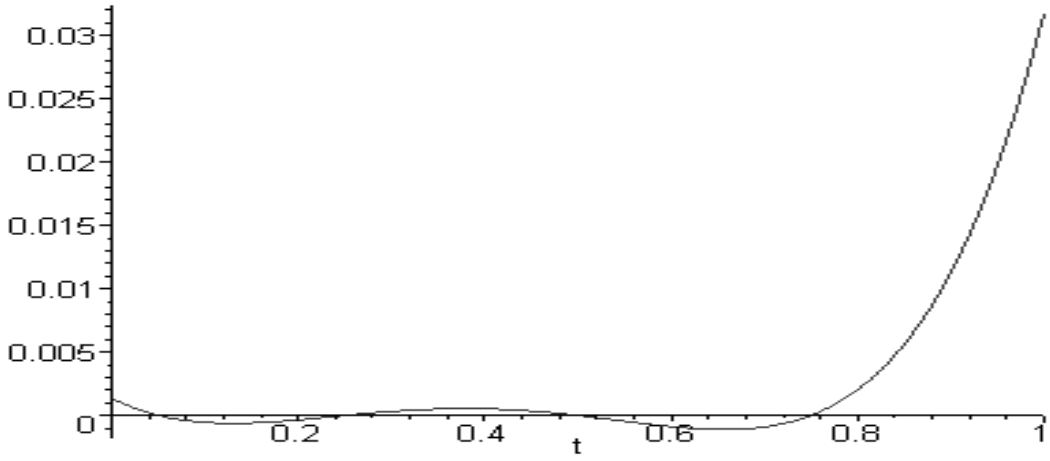
```
> evalf(y(x));#Оценка приближенного решения
```

$$-.08454666211\, x\,(x-1.) - .08521249007\, x^2\,(x-1.) + .1016377150\, x^3\,(x-1.)$$

```
>plot(y(x),x=0..1,color=red);#Построение графика приближенного решения
```




```
>plot(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x=0..1);#Построение графика невязки для оценки погрешности приближенного решения
```



Из графика следует, что максимальная погрешность имеет величину около 0.03 и наблюдается на правой границе отрезка.

7.3 Метод Бубнова-Галеркина

Для линейной краевой задачи $l(y) = f(x)$ с однородными краевыми условиями $l_1(y) = 0$ и $l_2(y) = 0$ подбирают систему функций $\{ \varphi_i(x) \}$, так чтобы эти функции были линейно независимы и удовлетворяли однородным краевым условиям:

$$l_1(\varphi_i(x))|_{x=0} = 0 \text{ и } l_2(\varphi_i(x))|_{x=l} = 0 .$$

Рекомендуется, чтобы функции $\{ \varphi_i(x) \}$ были ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\left(\varphi_i(x), \varphi_j(x)\right) = \int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 .$$

Приближенное решение дифференциального уравнения отыскивается в виде суммы

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) .$$

Для нахождения констант C_i составляют систему уравнений, требуя ортогональности невязки решения

$$\psi(x) = l(y^*) - f(x)$$

каждой функции φ_i в смысле скалярного произведения. Таким образом, получают систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_1(x)) = (f(x), \varphi_1(x)) \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_2(x)) = (f(x), \varphi_2(x)) \\ \qquad\qquad \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_n(x)) = (f(x), \varphi_n(x)) \end{array}\right\}, \qquad (3.51)$$

имеющую единственное решение.

После определения значений неизвестных констант из системы (3.51), получается приближенное решение исходной задачи в аналитической форме записи:

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x). \qquad (3.52)$$

Приведенный ниже пример применения метода иллюстрирует его возможности. Решается та же краевая задача, что и в примере 3.13.

Пример 7.2. На отрезке [0,1] решить методом Бубнова – Галеркина краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &y'' + x \cdot y' + x^2 \cdot y = x(x-1) \\ &y(0) = 0, y(1) = 0 \end{aligned}.$$

```
>restart:

>y:=unapply(a1*sin(Pi*x)+a2*sin(2*Pi*x)+a3*sin(3*Pi*x)+a4*sin(4*Pi*
x),x);# Построение приближенного решения
```

$$y := x \to a1 \sin(\pi x) + a2 \sin(2 \pi x) + a3 \sin(3 \pi x) + a4 \sin(4 \pi x)$$

```
>  nv1:=unapply(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x);#
Функция невязки решения
```

$$\begin{aligned} nv1 := x \to & -a1 \sin(\pi x) \pi^2 - 4\, a2 \sin(2 \pi x) \pi^2 - 9\, a3 \sin(3 \pi x) \pi^2 - 16\, a4 \sin(4 \pi x) \pi^2 \\ & + x\,(a1 \cos(\pi x) \pi + 2\, a2 \cos(2 \pi x) \pi + 3\, a3 \cos(3 \pi x) \pi + 4\, a4 \cos(4 \pi x) \pi) \\ & + x^2\,(a1 \sin(\pi x) + a2 \sin(2 \pi x) + a3 \sin(3 \pi x) + a4 \sin(4 \pi x)) - x\,(x-1) \end{aligned}$$

```
>l1:=int(nv1(x)*sin(Pi*x),x=0..1);l2:=int(nv1(x)*sin(2*Pi*x),x=0..
1);l3:=int(nv1(x)*sin(3*Pi*x),x=0..1);l4:=int(nv1(x)*sin(4*Pi*x),x=
0..1);# Ортогональность невязки линейно-независимым функциям,
используемым при построении решения по (3.51)
```

$$\begin{aligned} l1 := & -\frac{1}{3600}\,(1800\, a1\, \pi^5 - 1350\, \pi^3\, a3 + 2400\, a2\, \pi^3 + 3200\, a2\, \pi + 900\, a1\, \pi + 256\, a4\, \pi \\ & + 300\, a1\, \pi^3 + 960\, a4\, \pi^3 - 675\, a3\, \pi - 14400) \,/\, \pi^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l2 := & -\frac{1}{3600}\,(-2400\, a4\, \pi^2 + 4320\, a3\, \pi^2 + 3456\, a3 - 800\, a4 + 3200\, a1 + 300\, a2\, \pi^2 \\ & - 2400\, a1\, \pi^2 + 7200\, a2\, \pi^4 + 225\, a2) \,/\, \pi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l3 := & \frac{1}{529200}\,(-508032\, a2\, \pi - 198450\, a1\, \pi^3 - 14700\, a3\, \pi - 518400\, a4\, \pi + 635040\, a2\, \pi^3 \\ & + 99225\, a1\, \pi + 78400 - 907200\, a4\, \pi^3 - 44100\, \pi^3\, a3 - 2381400\, a3\, \pi^5) \,/\, \pi^3 \end{aligned}$$

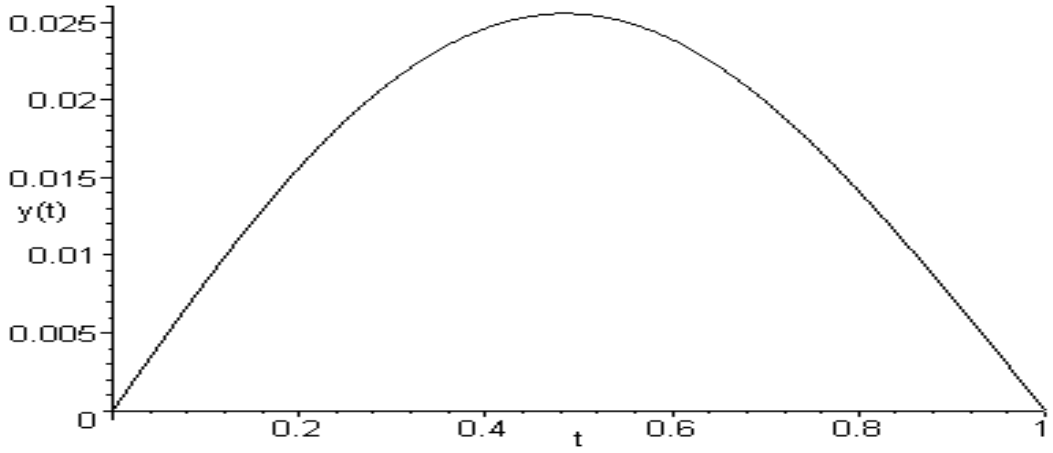
$$\begin{aligned} l4 := & -\frac{1}{705600}\,(-188160\, a1\, \pi^2 + 470400\, a2\, \pi^2 + 50176\, a1 + 691200\, a3 + 5644800\, a4\, \pi^4 \\ & + 58800\, a4\, \pi^2 - 1209600\, a3\, \pi^2 - 156800\, a2 + 11025\, a4) \,/\, \pi^2 \end{aligned}$$

```
>s1:=solve({l1=0,l2=0,l3=0,l4=0},{a1,a2,a3,a4}):assign(s1);#Составление и решение системы уравнений относительно неизвестных констант a1,a2,a3,a4
```

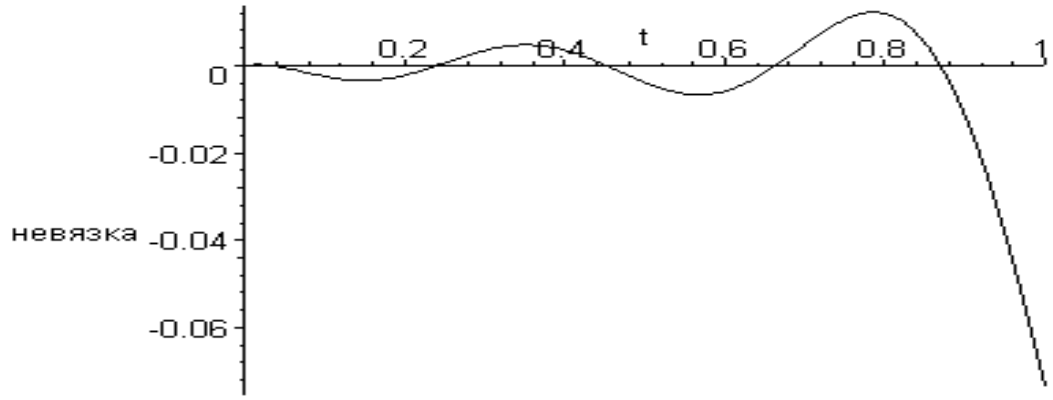
```
> evalf(y(x));# Оценка вида приближенного решения
```

$$.02545617921\sin(3.141592654\,x) + .0007481628720\sin(6.283185308\,x) - .00008083082153\sin(9.424777962\,x) + .00007581343845\sin(12.56637062\,x)$$

```
>      plot(y(t),t=0..1,color=black,labels=["t","y(t)"]);#Построение графика приближенного решения
```




```
>                plot(diff(y(t),t$2)+t*diff(y(t),t)+t^2*y(t)-t*(t-1),t=0..1,color=black,labels=["t","невязка"]);#построение графика невязки
```



Из графика следует, что максимальная погрешность имеет величину около 0.06 и наблюдается на правой границе отрезка.

7.4. Метод прогонки

Метод прогонки для решения краевой задачи.

$$\begin{cases} l(y) = y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x) \\ l_1(y)\big|_{x=0} = \alpha\cdot y + \beta\cdot y'\big|_{x=0} = A \\ l_2(y)\big|_{x=l} = \gamma\cdot y + \delta\cdot y'\big|_{x=l} = B \end{cases} \qquad (3.53)$$

Для построения приближенного решения задачи (3.53) введем дискретно заданную функцию y_n определенную в $n+1$ точке на $[0,l], 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l$. Она в узлах $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l$ имеет те же значения, которые имеет и решение исходной задачи.

Справедливы следующие приближенные равенства для первой и второй производных искомого решения:

$y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}, i = 0,\ldots,n-1, \sim o(h)$ - порядок погрешности

$y_i'' = \dfrac{y_{i+2} - 2\cdot y_{i+1} + y_i}{h^2}, i = 0,\ldots,n-2, \sim o(h)$

Используя функцию y_n, можно систему (3.53) свести к системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{l}(y) = \dfrac{y_{i+2} - 2\cdot y_{i+1} + y_i}{h^2} + p(x_i)\cdot\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i)\cdot y_i = f(x_i) \\ \tilde{l}_1(y) = \alpha\cdot y_0 + \beta\cdot\dfrac{y_1 - y_0}{h} = A \\ \tilde{l}_2(y) = \gamma\cdot y_{n-1} + \delta\cdot\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{cases} \qquad (3.54)$$

Заменим краевую задачу (3.53) краевой задачей (3.54), при $i = 0,\ldots,n-2$.

Решение системы (3.54) при $h \to 0$ стремится к точному решению задачи (3.53), то есть схема (3.54) аппроксимирует исходную задачу.

Система (3.54) это система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_i, где введено обозначение $h = x_{i+1} - x_i$. В развернутой форме записи она имеет вид:

$$\begin{cases} y_0 \cdot (\alpha \cdot h - \beta) + \beta \cdot y_1 = A \cdot h \\ y_0 \cdot (q_0 \cdot h^2 - p_0 \cdot h + 1) + y_1 \cdot (p_0 \cdot h - 2) + y_2 = f_0 \cdot h^2 \\ y_1 \cdot (q_1 \cdot h^2 - p_1 \cdot h + 1) + y_2 \cdot (p_1 \cdot h - 2) + y_3 = f_1 \cdot h^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-2} \cdot (q_{n-2} \cdot h^2 - p_{n-2} \cdot h + 1) + y_{n-1} \cdot (p_{n-2} \cdot h - 2) + y_n = f_{n-2} \cdot h^2 \\ y_{n-1} \cdot (\gamma \cdot h - \delta) + y_n \cdot \delta = B \cdot h \end{cases}$$

Эту систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений дискретной функции y_n запишем в виде:

$$\begin{cases} y_0 \cdot a_0 + y_1 \cdot b_1 = A_0 \\ y_0 \cdot a_1 + y_1 \cdot b_2 + y_2 = A_1 \\ \_\_\_\_\_ y_1 \cdot a_2 + y_2 \cdot b_3 + y_3 = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \_\_\_\_\_ y_{n-2} \cdot a_{n-1} + y_{n-1} \cdot b_n + y_n = A_{n-1} \\ \_\_\_\_\_ y_{n-1} \cdot a_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n \end{cases}$$

В матричной форме с трехдиагональной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_4 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

она выглядит так

$$C \cdot \bar{y} = \bar{A}.$$

Для решения систем с такими матрицами применяется метод прогонки. Метод прогонки – это метод последовательного исключения неизвестных, начиная с первого уравнения с учётом специфики матрицы С. Алгоритм представлен ниже:

$$y_0 = \frac{A_0}{a_0} - \frac{b_1}{a_0} \cdot y_1 \xrightarrow{подставим} (2)$$

$$a_1 \cdot \frac{A_0}{a_0} - \frac{a_1 \cdot b_1}{a_0} \cdot y_1 + y_1 \cdot b_2 + y_2 = A_1 \Rightarrow y_1 = \frac{A_1 a_0 - a_1 \cdot A_0}{b_2 a_0 - a_1 \cdot b_1} - \frac{a_0}{b_2 a_0 - a_1 \cdot b_1} \cdot y_2 = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{a}_1} - \frac{\tilde{a}_{i-1}}{\tilde{a}_1} y_2$$

$$y_i = \frac{A_i \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot \tilde{A}_{i-1}}{b_{i+1} \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot b_i} - \frac{\tilde{a}_{i-1}}{b_{i+1} \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot b_i} \cdot y_{i+1} \quad . \tag{69}$$

где

$$\tilde{A}_i = A_i \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot \tilde{A}_{i-1}, \qquad \tilde{a}_i = b_{i+1} \tilde{a}_{i-1} - a_i \cdot b_i, \quad \tilde{a}_0 = a_0, \tilde{A}_0 = A_0.$$

Или в более общем виде $y_{n-1} = D_n - E_n \cdot y_n$. Подстановка $y_{n-1} = D_n - E_n \cdot y_n$ в последнее разностное уравнений дает:

$$\Rightarrow y_{n-1} \cdot a_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n \Rightarrow a_n \cdot D_n - E_n \cdot a_n \cdot y_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n$$

Из последнего выражения определим

$$y_n = \frac{(A_n - a_n \cdot D_n)}{(b_{n+1} - E_n \cdot a_n)}.$$

Делая обратный ход, начиная с правого края области определения, получим значения решения во всех внутренних точках интервала. При возвращении к левому краю отрезка все y_i оказываются найденными с использованием рекуррентных формул.

Пример 3.15. Найти решение краевой задачи методом прогонки.

$$y'' + x \cdot y' + x^2 y = x(x-1)$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0$$

$$x_1 = 1/n, x_2 = 2/n, x_3 = 3/n, x_4 = 4/n, \ldots . x_{n+1} = 1$$

$$y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i + x_i \cdot h \cdot (y_{i+1} - y_i) + h^2 \cdot x_i^2 y_i = x_i \cdot h^2, i = 1,2,3 \ldots . (n-1)$$

```
>restart:n:=10;b:=1.;a:=0;h:=(b-a)/n; x:=array(1..n+1);
y:=array(1..n+1); s[i]:=array(1..n+1);#Задание матриц
```

$$n := 10$$

$$b := 1.$$

$$a := 0$$

$$h := .1000000000$$

$$x := \mathrm{array}(1 \,..\, 11, [\ ])$$

$$y := \mathrm{array}(1 \,..\, 11, [\ ])$$

$$s_i := \mathrm{array}(1 \,..\, 11, [\ ])$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_1 \cdot (x_1{}^2 h^2 - x_1 h) + y_2 \cdot (x_1 h - 2) + y_3 = x_1 \cdot (x_1 - 1) \\ \underline{\qquad\qquad} y_2 \cdot (x_2{}^2 h^2 - x_2 h) + y_3 \cdot (x_2 h - 2) + y_4 = x_2 \cdot (x_2 - 1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} y_{n-1} \cdot (x_{n-1}{}^2 h^2 - x_{n-1} h) + y_n \cdot (x_{n-1} h - 2) + y_{n+1} = x_{n-2}(x_{n-1} - 1) \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

```
> y[1]:=0;x[1]:=0;for i from 1 to n do x[i+1]:=x[1]+i*h;od;
p:=unapply(x^2*h^2-x*h,x); q:=unapply(x*h-2,x); #Задание узловых
значений для переменной x и коэффициентов системы уравнений
```

$$y_1 := 0$$

$$x_1 := 0$$

$$x_2 := .1000000000$$

$$x_3 := .2000000000$$

$$x_4 := .3000000000$$

$$x_5 := .4000000000$$

$$x_6 := .5000000000$$

$$x_7 := .6000000000$$

$$x_8 := .7000000000$$

$$x_9 := .8000000000$$

$$x_{10} := .9000000000$$

$$x_{11} := 1.000000000$$

$$p := x \to .01000000000\, x^2 - .1000000000\, x$$

$$q := x \to .1000000000\, x - 2$$

```
> for i from 1 to n-1 do
s[i]:=solve(y[i]*p(x[i])+y[i+1]*q(x[i])+y[i+2]=x[i]*(x[i]-
1),{y[i+1]}); assign(s[i]); od;
```

$$s_1 := \{y_2 = .5000000000\, y_3\}$$

$$s_2 := \{y_3 = .5012656959\, y_4 + .04511391263\}$$

$$s_3 := \{y_4 = .07996471180 + .5025568060\, y_5\}$$

$$s_4 := \{y_5 = .1046409722 + .5038736793\, y_6\}$$

$$s_5 := \{y_6 = .1192219344 + .5052166782\, y_7\}$$

$$s_6 := \{y_7 = .1237777261 + .5065861796\, y_8\}$$

$$s_7 := \{y_8 = .1183695593 + .5079825751\, y_9\}$$

$$s_8 := \{y_9 = .1030499045 + .5094062719\, y_{10}\}$$

$$s_9 := \{y_{10} = .07786264440 + .5108576923\, y_{11}\}$$

```
> y[n+1]:=0;
```

$$y_{11} := 0$$

$$s3 := \{y_4 = -.2517842217\}$$

```
> for i from 1 to n+1 do eval(y[i]);od;#полученные значения
решения, обратный ход осуществлен по приведенным выше формулам
```

0

.07041478300

.1408295660

.1909479427

.2208371862

.2306058419

.2204675979

.1908655935

.1427136239

.07786264440

0

7.5 Контрольные вопросы и задания

1. Как сводится решение краевой задачи к двум задачам Коши?
2. Назовите основные положения метода коллокаций.
3. Назовите основные положения метода Бубнова-Галеркина.
4. Как производится оценка погрешности метода коллокаций?
5. Как производится оценка погрешности метода Бубнова-Галеркина?
6. Каковы основные положения метода прогонки?
7. Запишите уравнения для определения коэффициентов аппроксимирующих функций метода коллокаций.
8. Запишите уравнения для определения коэффициентов аппроксимирующих функций метода Бубнова-Галеркина.
9. Запишите уравнения для определения коэффициентов аппроксимирующих функций метода Прогонки.