Олимпиада 2007.

Задание 1. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$, отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

Доказательство.

Уравнение касательной плоскости к поверхности заданной неявно уравнением $F(x;y;z)=0$ в точке $M(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$.

Возьмем произвольную(текущую) точку $M(x_0;y_0;z_0)$ принадлежащую поверхности, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$.

Найдем частные производные в точке M, $F'_x(M)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$; $F'_y(M)=\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}}$;

$F'_y(M)=\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}}$ и уравнение касательной плоскости примет вид

$\dfrac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}+\dfrac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}}+\dfrac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}}=0$. Преобразуем его, приведя к уравнению плоскости в отрезках. $\dfrac{x}{2\sqrt{x_0}}-\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}+\dfrac{y}{2\sqrt{y_0}}-\dfrac{\sqrt{y_0}}{2}+\dfrac{z}{2\sqrt{z_0}}-\dfrac{\sqrt{z_0}}{2}=0$,

$\dfrac{x}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{y}{\sqrt{y_0}}+\dfrac{z}{\sqrt{z_0}}-\sqrt{a}=0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x_0}\sqrt{a}}+\dfrac{y}{\sqrt{y_0}\sqrt{a}}+\dfrac{z}{\sqrt{z_0}\sqrt{a}}=1$. Итак на осях Ox, Oy и Oz касательная плоскость отсекает отрезки величиной $\sqrt{x_0}\sqrt{a}$, $\sqrt{y_0}\sqrt{a}$ и $\sqrt{z_0}\sqrt{a}$ соответственно.

Найдем их сумму. $\sqrt{x_0}\sqrt{a}+\sqrt{y_0}\sqrt{a}+\sqrt{z_0}\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=a$ - константа.

Доказательство закончено.

Задание 2. Доказать, что семейства гипербол $x^2-y^2=a$ и $xy=b$ образуют ортогональную сетку, то есть кривые этих семейств пересекаются под прямым углом.

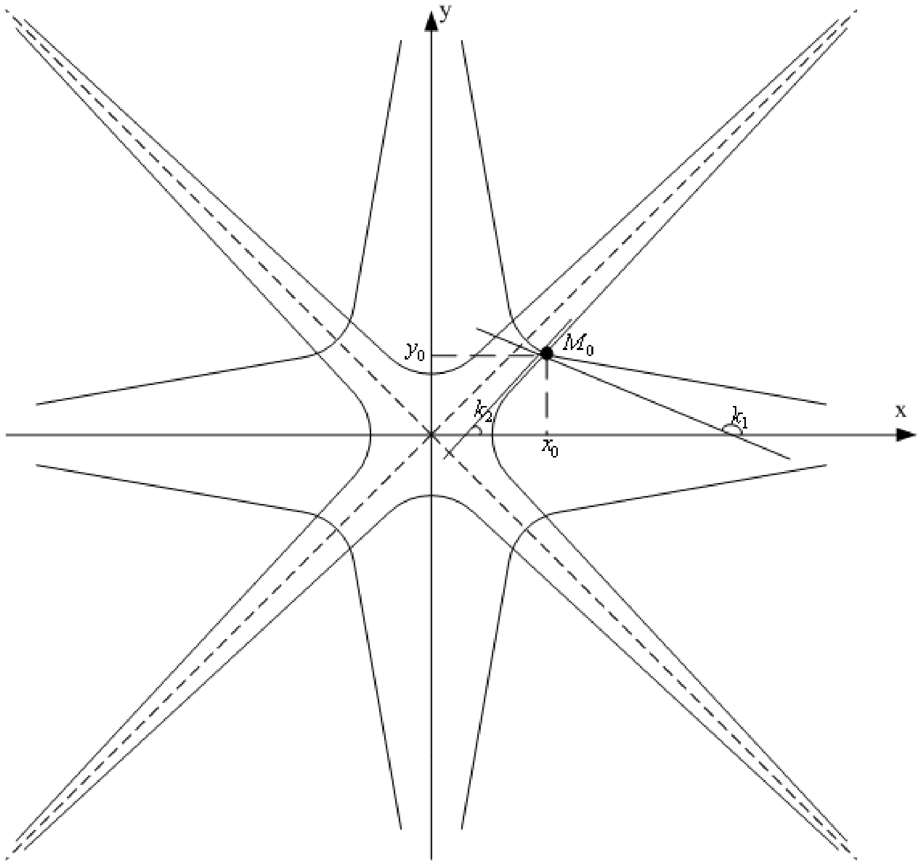
Доказательство.

Углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными этих кривых в этой точке. В силу симметрии, рассмотрим лишь первую четверть $x>0$, $y>0$.

Возьмем точку $M_0(x_0; y_0)$ пересечения двух произвольных кривых из этих семейств.

$$\begin{cases} x_0^{\ 2} - y_0^{\ 2} = a \\ x_0 y_0 = b \end{cases}$$

Найдем угловой коэффициент касательной к каждой из кривой в этой точке.



1) $y = \dfrac{b}{x}$, $y' = -\dfrac{b}{x^2}$, $y_0 = \dfrac{b}{x_0}$, $y'(x_0) = -\dfrac{b}{x_0^{\ 2}}$, $k_1 = -\dfrac{b}{x_0^{\ 2}}$

2) $y^2 = x^2 - a$, $y = \sqrt{x^2 - a}$, $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a}}$, $y_0 = \sqrt{x_0^{\ 2} - a}$, $y'(x_0) = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^{\ 2} - a}}$,

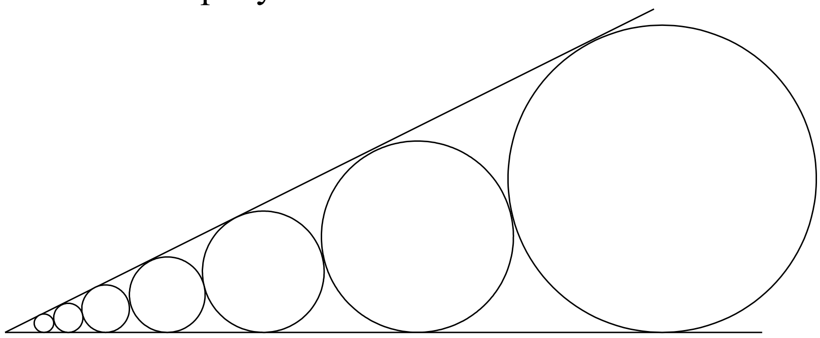
$k_2 = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^{\ 2} - a}}$.

Если $k_1 \cdot k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны.

$-\dfrac{b}{x_0^{\ 2}} \cdot \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^{\ 2} - a}} = \dfrac{-b}{x_0\sqrt{x_0^{\ 2} - a}} = -\dfrac{b}{x_0 y_0} = -\dfrac{b}{b} = -1$. Касательные в точке касания перпендикулярны, следовательно кривые ортогональны.

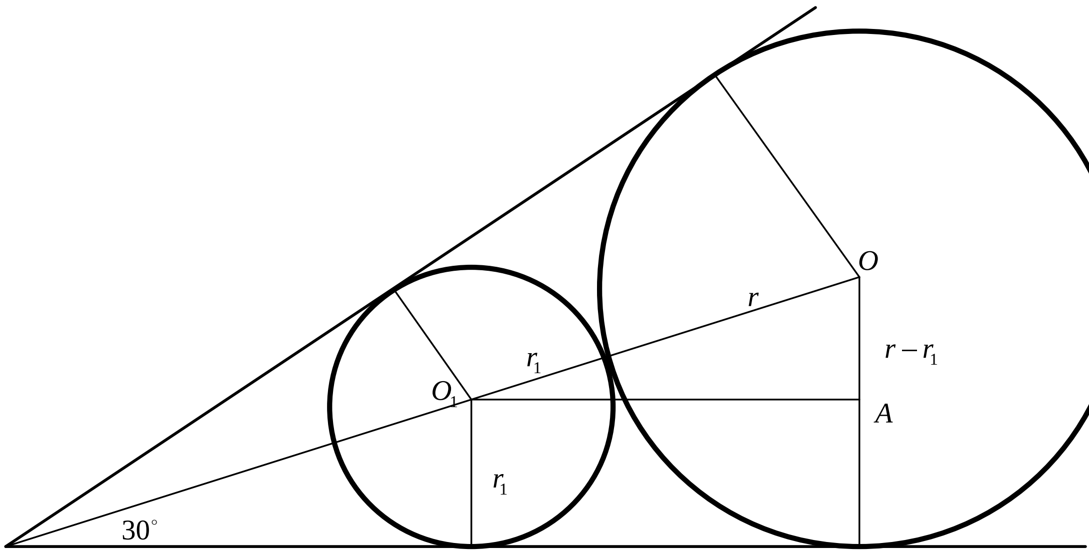
Доказательство закончено.

Задание 3. В угол величиной 60° вписана окружность радиуса r, затем еще одна внутренним образом касающаяся первой, и еще и т.д. как показано на рисунке:



Найти сумму площадей всех полученных кругов.

Решение.



Из прямоугольного треугольника AO_1O с $\angle AO_1O = 30^\circ$ имеем $2(r-r_1) = r + r_1$, откуда $r_1 = \dfrac{1}{3}r$. Аналогично $r_2 = \dfrac{1}{3}r_1$ или $r_2 = \dfrac{1}{3^2}r$. Далее получаем $r_n = \dfrac{1}{3^n}r$ и т.д.

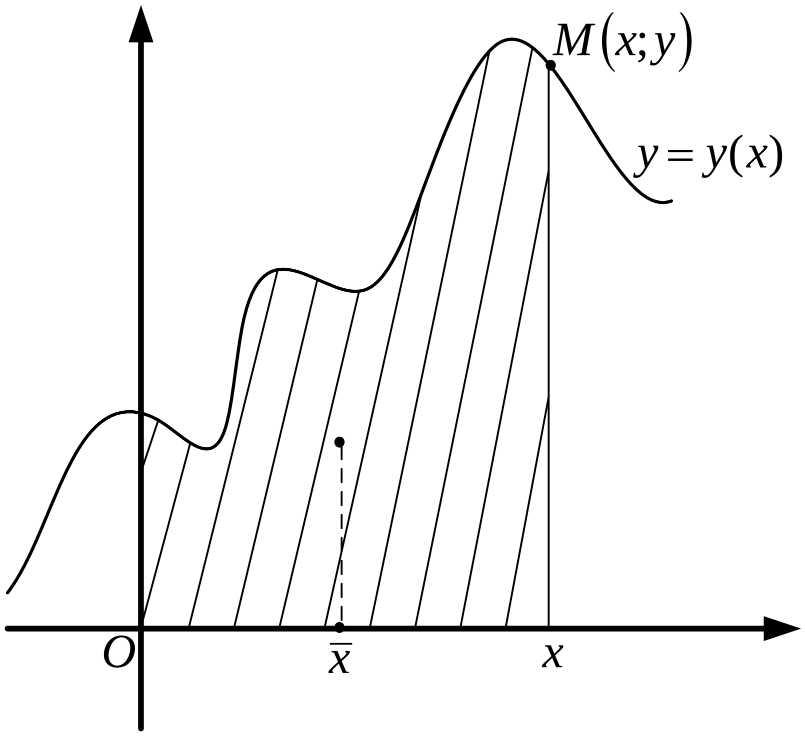
$$S = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots + \pi r_n^2 + \ldots = \pi\left(r^2 + \frac{1}{9}r^2 + \frac{1}{9^2}r^2 + \ldots + \frac{1}{9^n}r^2 + \ldots\right) =$$

$$\pi r^2\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{1}{9^n} + \ldots\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{9}}\right) = \frac{9}{8}\pi r^2.$$

Ответ: $\dfrac{9}{8}\pi r^2$.

Задание 4. Найти кривую, у которой абсцисса центра тяжести плоской фигуры ограниченной осями координат, этой кривой и вертикальной прямой проходящей через абсциссу любой ее точки, равна ¾ абсциссы этой точки.

Решение.



Абсцисса центра тяжести однородной плоской фигуры криволинейной трапеции ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле $\bar{x} = \dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$. Возьмем произвольную (текущую) точку M на искомой кривой $y = y(x)$, $M(x; y(x))$. Рассмотрим криволинейную фигуру согласно условию задачи и выразим ее абсциссу центра тяжести:

$\bar{x} = \dfrac{\int_0^x xy(x)dx}{\int_0^x y(x)dx}$. Получим уравнение $\dfrac{\int_0^x xy(x)dx}{\int_0^x y(x)dx} = \dfrac{3}{4}x$, $\int_0^x xy(x)dx = \dfrac{3}{4}x\int_0^x y(x)dx$,

продифференцируем по x последнее равенство $\left(\int_0^x xy(x)dx\right)' = \dfrac{3}{4}\left(x \cdot \int_0^x y(x)dx\right)'$.

Производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению пдынтегрального выражения на верхнем пределе.

$xy(x) = \dfrac{3}{4}\left(1 \cdot \int_0^x y(x)dx + x \cdot y(x)\right)$, $xy = \dfrac{3}{4}\int_0^x y(x)dx + \dfrac{3}{4}xy$, $\dfrac{1}{4}xy = \dfrac{3}{4}\int_0^x y(x)dx$,

Продифференцируем по x полученное равенство еще раз

$\frac{1}{4}(x \cdot y)' = \frac{3}{4}\left(\int\limits_0^x y(x)dx\right)'$, $\frac{1}{4}(1 \cdot y + x \cdot y') = \frac{3}{4}y$, $\frac{1}{4}xy' = \frac{1}{2}y$, $y' = 2\frac{y}{x}$ получили дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $y = y(x)$.

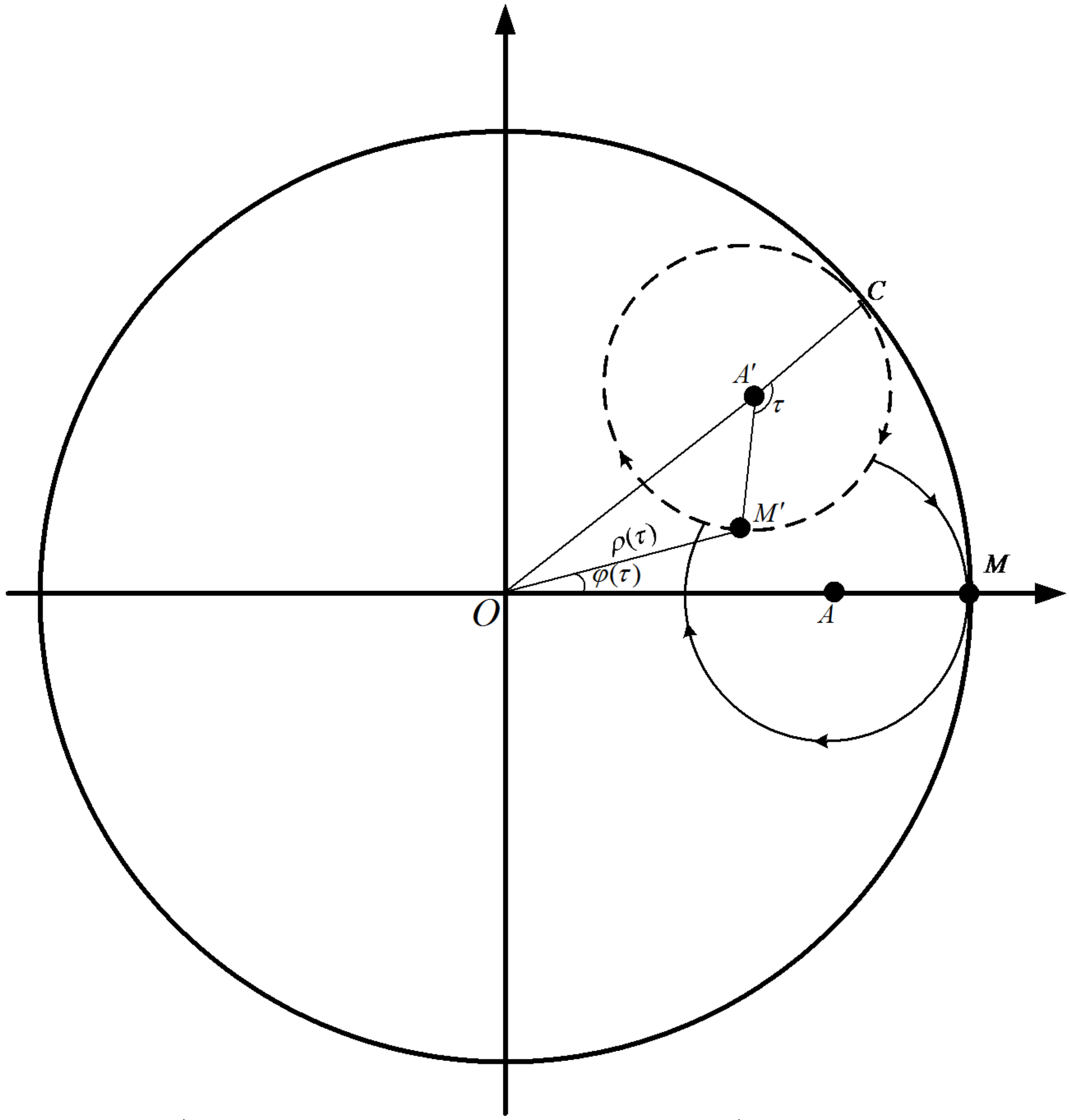
Решаем его $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$, $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$, $y = Cx^2$

Ответ: парабола $y = Cx^2$.

Задание 5. Круг радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R оставаясь внутри нее. Траектория некоторой точки M окружности катящегося круга называется гипоциклоидой. Изобразить эту траекторию при $r = \frac{1}{2}R$.

Решение.

Рассмотрим параметрическое уравнение этой кривой в полярной системе координат $\begin{cases} \rho = \rho(\tau) \\ \varphi = \varphi(\tau) \end{cases}$, где τ - угол поворота круга радиуса r.

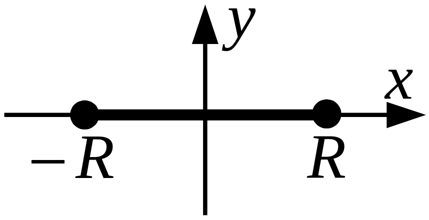


Из $\Delta OA'M'$ $\left(A'O = R - r; \quad A'M' = r; \quad \angle OA'M' = \pi - \tau\right)$ по теореме косинусов имеем: $OM'^2 = OA'^2 + A'M'^2 - 2 \cdot OA' \cdot A'M' \cdot \cos\angle OA'M'$, то есть $\rho^2(\tau) = (R - r)^2 + r^2 - 2(R - r)r\cos(\pi - \tau)$. При $R = 2r$ получается: $\rho(\tau) = \sqrt{r^2 + r^2 + 2r^2\cos\tau} = r\sqrt{2(1 + \cos\tau)}$, $OA' = A'M'$ и $\Delta OA'M'$ - равнобедренный, следовательно $\angle A'OM' = \dfrac{\pi - (\pi - \tau)}{2} = \dfrac{\tau}{2}$. Длина дуги $M'C$ равна длине дуги MC, то есть $\tau r = (\angle COM)R$, откуда $\angle COM = \dfrac{r}{R}\tau = \dfrac{\tau}{2}$.

$\varphi(\tau) = \angle COM - \angle A'OM' = \dfrac{\tau}{2} - \dfrac{\tau}{2} = 0$.

Итак $\begin{cases}\rho(\tau)=r\sqrt{2(1+\cos\tau)}\\ \varphi(\tau)=0\end{cases}$, где $\tau\in[0;\pi]$. Это параметрическое уравнение траектории точки M маленького круга, когда он делает пол оборота и точка M переходит в точку O, двигаясь по оси Ox, а центр становится на оси Oy. Из соображений симметрии при дальнейшем движении круга точка M будет перемещаться от точки O по оси Ox в отрицательном направлении.

Ответ: отрезок $[-R;R]$.



Олимпиада 2008

Задание 1. Для каждого значения параметра λ исследовать на совместность и найти решение системы $\begin{cases}(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\end{cases}$

Решение.

Выпишем основную и расширенную матрицу системы и приведем ее к треуголиному виду.

$$A=\begin{pmatrix}3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-\lambda & 1\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1\\ 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix}\approx$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1-(2-\lambda)^2 & 1-2+\lambda\\ 0 & 2-\lambda-3+2\lambda & 1-(2-\lambda)(3-2\lambda) & \lambda-3+2\lambda\end{pmatrix}\approx$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & -2\lambda^2+7\lambda-5 & 3\lambda-3\\ 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

По теореме Кронеккера-Капелли, если ранг основной матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы, то система несовместна, то есть решений не имеет.

Если $-\lambda^2+4\lambda-3$=0, а $\lambda-1\neq 0$, то система несовместна.

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=1.\qquad \lambda\neq 1.$

При $\lambda=3$ система несовместна, решений не имеет.

При $\lambda = 1$ имеем: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, откуда $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ и $\begin{cases} x_1 = 1 - C_2 - C_1 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = C_2 \end{cases}$ - общее решение.

При $\lambda \neq 3$ и $\lambda \neq 1$ ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен числу неизвестных, следовательно система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \\ (\lambda - 1)x_2 + (-2\lambda^2 + 7\lambda - 5)x_3 = 3\lambda - 3 \\ (-\lambda^2 + 4\lambda - 3)x_3 = \lambda - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \\ (\lambda - 1)x_2 - (2\lambda - 5)(\lambda - 1)x_3 = 3(\lambda - 1) \\ -(\lambda - 1)(\lambda - 3)x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \\ x_2 - (2\lambda - 5)x_3 = 3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3-\lambda} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{2-\lambda}{3-\lambda} = 1 \\ x_2 = 3 + \dfrac{2\lambda - 5}{3-\lambda} \\ x_3 = \dfrac{1}{3-\lambda} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -2 - \dfrac{\lambda - 3}{3-\lambda} \\ x_2 = \dfrac{4-\lambda}{3-\lambda} \\ x_3 = \dfrac{1}{3-\lambda} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{4-\lambda}{3-\lambda} \\ x_3 = \dfrac{1}{3-\lambda} \end{cases}$$

Задание 2. Пусть $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 - x & 5 - 3x^2 & 3x^3 - 1 \\ 2x^2 - 1 & 3x^5 - 1 & 7x^8 - 1 \end{vmatrix}$. Доказать, что найдется число c $(0 < c < 1)$ такое, что $f'(c) = 0$.

Решение.

Найдем $f(0)$ и $f(1)$:

$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, так как первая и третья строки пропорциональны.

$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$, так как первая и вторая строки пропорциональны.

Функция $f(x)$ многочлен и следовательно непрерывна на всей числовой прямой и точно имеет производную в интервале $(0; 1)$ и на концах отрезка $[0; 1]$ принимает равные значения, значит по теореме Роля в интервале $(0; 1)$ существует точка, в которой производная данной функции равна нулю.

Доказательство закончено.

Задание 3. Функция $f(x)$ определена в окрестности точки a. Существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к точке a, состоящая из точек разрыва функции $f(x)$. Может ли функция $f(x)$ быть непрерывной (дифференцируемой) в точке a? Ответ обосновать.

Решение.

Может.

1) например $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x=\dfrac{1}{n}\\ x, & \text{при} \quad x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}$, где $n\in N$. Очевидно, что последовательность $x_n=\dfrac{1}{n}$, состоящая из точек разрыва первого рода рассмотренной функции $f(x)$, сходится к точке $a=0$.

Найдем значение функции $f(x)$ в точке 0: $f(0)=0$

Найдем предел функции $f(x)$ в точке 0: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Они равны: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, значит по определению функция $f(x)$ непрерывна в точке 0.

2) Рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x=\dfrac{1}{n}\\ x^2, & \text{при} \quad x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}$, где $n\in N$. Очевидно, что последовательность $x_n=\dfrac{1}{n}$, состоящая из точек разрыва первого рода рассмотренной функции $f(x)$, сходится к точке $a=0$. Докажем что эта функция дифференцируема в точке 0. Для этого точке 0 дадим приращение $\Delta x\neq 0$, тогда $f(0+\Delta x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad \Delta x=\dfrac{1}{n}\\ (\Delta x)^2, & \text{при} \quad \Delta x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}$, а

$$\Delta f = f(0+\Delta x)-f(0)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad \Delta x=\dfrac{1}{n}\\ (\Delta x)^2, & \text{при} \quad \Delta x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}$$ и

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\begin{cases}0, & \text{при} \quad \Delta x=\dfrac{1}{n}\\ \Delta x, & \text{при} \quad \Delta x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}$. Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента в точке $a=0$ существует и конечен, следовательно функция дифференцируема в точке 0.

Задание 4. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n+1}}{7^n}$.

Решение.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n+1}}{7^n}=5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n}}{7^n}$, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n}}{7^n}$ в развернутом виде:

$$1\cdot\frac{5}{7}+2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^3+4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^4+5\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^5\ldots+n\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots=$$

$$\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^3+$$

$$+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^5+\left(\frac{5}{7}\right)^5+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^5}_{5\quad слагаемых}+\ldots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n}_{n\quad слагаемых}+\ldots$$

Сгруппируем слагаемые так:

$$\left[\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^5+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+$$

$$+\left[\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^5+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+$$

$$\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^5+\left(\frac{5}{7}\right)^6+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+$$

$$+\left[\left(\frac{5}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^5+\left(\frac{5}{7}\right)^6+\left(\frac{5}{7}\right)^7+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+\ldots=$$

$$\frac{5}{7}\left[1+\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+$$

$$+\left(\frac{5}{7}\right)^2\left[1+\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3\left[1+\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+$$

$$+\left(\frac{5}{7}\right)^4\left[1+\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+\ldots+$$

$$+\left(\frac{5}{7}\right)^n\left[1+\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]+\ldots$$

В квадратных скобках получилась бесконечная сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{5}{7}<1$, то есть $S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{5}{7}}=\frac{7}{2}$.

Получим: $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{7}\right)^3\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{7}\right)^4\cdot\frac{7}{2}+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n\cdot\frac{7}{2}+\ldots=$

$=\frac{5}{2}\left[1+\frac{5}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots\right]=\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{35}{4}$. Итак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n+1}}{7^n}=5\cdot\frac{35}{4}=43\frac{3}{4}$$

Ответ: 43,75

Задание 5. Тело, нагретое до 100°С, охладилось за 20 мин до 60°С в комнате с температурой 20°С. Найти закон охлаждения тела. Через сколько минут оно остынет до 30°С, если скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела в данный момент и температуры воздуха в комнате?

Решение.

Пусть t - время, мин; $T(t)$ - температура тела, °С в момент времени t. Тогда скорость изменения температуры тела $\frac{dT}{dt}$ °С/мин. По условию $\frac{dT}{dt}=\alpha(T-20)$, где α - коэффициент пропорциональности. Получено дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его разделяя переменные:

$\frac{dT}{(T-20)}=\alpha dt$, $\int\frac{dT}{T-20}=\alpha\int dt$, $\ln(T-20)=\alpha t+C$, $T-20=e^{\alpha t+C}$,

$T(t)=e^{\alpha t+C}+20$.

Найдем неизвестные константы α и C из условий: $T(0)=100$ и $T(20)=60$.

$100=e^{\alpha\cdot 0+C}+20$, $e^C=80$, $C=\ln 80$ и следовательно $T(t)=80e^{\alpha t}+20$.

$60=80e^{\alpha\cdot 20}+20$, $e^{20\alpha}=0.5$, $\alpha=-\frac{\ln 2}{20}$.

$T(t)=80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}+20=80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}+20$.

Найдем за какое время t температура тела $T=30$ °C.

$30=80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}+20$, $\frac{1}{8}=2^{-\frac{t}{20}}$, $2^{-3}=2^{-\frac{t}{20}}$, $t=60$ мин

Ответ: закон охлаждения тела - $T(t)=80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}+20$,

через 60 мин.

Олимпиада 2009

1. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3 \quad (a>0)$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

Доказательство.

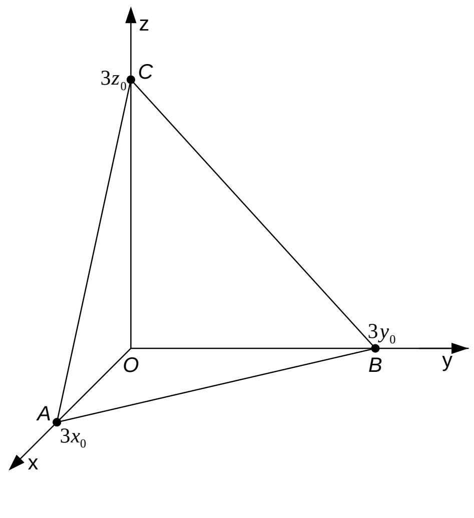
Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$. Возьмем произвольную точку $(x_0;y_0;z_0)$ поверхности $xyz-a^3=0$ и построим в ней уравнение касательной плоскости. $F'_x=yz$, $F'_x(x_0;y_0;z_0)=y_0z_0$; $F'_y=xz$, $F'_y(x_0;y_0;z_0)=x_0z_0$; $F'_z=yx$, $F'_z(x_0;y_0;z_0)=y_0x_0$.

$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+y_0x_0(z-z_0)=0$, $y_0z_0x+x_0z_0y+y_0x_0z-3x_0y_0z_0=0$.

Приведем уравнение к уравнению плоскости в отрезках, чтобы узнать какие отрезки отсекает касательная плоскость на осях координат.

$$\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$$



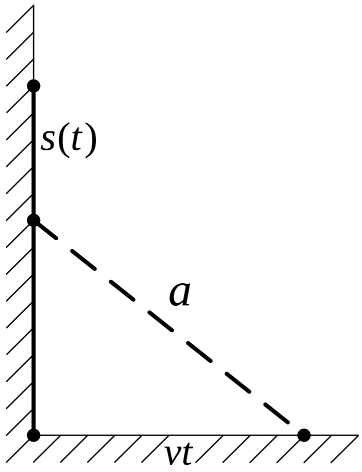
Найдем объем тетраэдра $OABC$ через смешанное произведение векторов $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ по формуле

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3x_0 & 0 & 0\\ 0 & 3y_0 & 0\\ 0 & 0 & 3z_0\end{vmatrix}=\frac{27x_0y_0z_0}{6} \text{ или } V=\frac{9}{2}a^3.$$

То есть объем тетраэдра не зависит от выбора точки $(x_0; y_0; z_0)$ на поверхности $xyz = a^3$ и всегда равен $\frac{9}{2}a^3$.

Доказательство закончено.

2. Лестница длиной a, прислоненная к вертикальной стене, падает, скользя одним концом о стену, а другим о пол. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы в момент, когда нижний конец, отодвигающийся от стены с постоянной скоростью v, отстоит от нее на расстояние b.
Решение.



За время t нижний конец лестницы пройдет расстояние vt, а перемещение верхнего конца будет $s(t) = a - \sqrt{a^2 - (vt)^2}$. Следовательно его скорость составит $s'(t) = \frac{v^2 t}{\sqrt{a^2 - v^2 t^2}}$. Найдем скорость верхнего конца лестницы в момент когда $vt = b$: $s' = \frac{vb}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Ответ: $\frac{vb}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

3. Ребенок, идущий по тротуару, везет за собой по мостовой тележку (рис. 1). Найти линию (уравнение этой линии), по которой она движется.

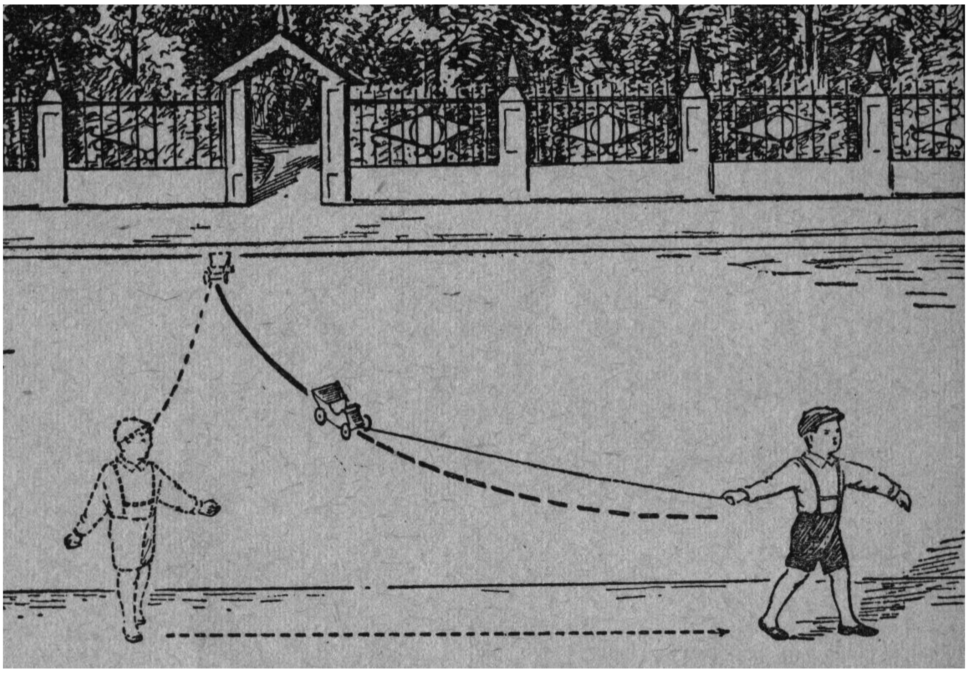


Рис 1.

Решение.

Пусть длина веревки равна a. На искомой линии $y = f(x)$ возьмем произвольную точку $B(x;y)$. Кривая $y = f(x)$ обладает тем свойством, что в любой ее точке отрезок касательной BC будет равен a, $y(0) = a$. Из ΔABC:

$$tg(\angle BCA) = -y'(x) = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Получили дифференциальное уравнение вида: $-\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, откуда,

разделяя переменные, имеем $\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = -dx$,

$$-x + C = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \begin{bmatrix} y = a\cos t \\ dy = -a\sin t dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}}{a\cos t}(-a)\sin t\, dt = a\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = a\int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = a\left(\int \frac{dt}{\cos t} - \sin t\right) =$$

$$= a\left(\int \frac{\cos t\, dt}{\cos^2 t} - \sin t\right) = a\left(\int \frac{d\sin t}{1 - \sin^2 t} - \sin t\right) = [q = \sin t] =$$

$$a\left(\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+q} + \frac{1}{1-q}\right)dq - q\right) = \frac{a}{2}(\ln(1+q) - \ln(1-q)) - aq = \frac{a}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - a\sin t =$$

$$= \begin{bmatrix} y^2 = a^2\cos^2 t \\ a^2\sin^2 t = a^2 - y^2 \end{bmatrix} = \frac{a}{2}\ln\frac{1 + \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2}}}{1 - \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2}}} - a\sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2}} =$$

$= \frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}} - \sqrt{a^2-y^2}$. Используя начальное условие $y(0)=a$, определяем константу $C=0$. Итак уравнение искомой линии (трактриса) имеет вид: $x=\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}$.

4. Найти сумму ряда $1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots+(-1)^n(2n+1)x^{2n}+\ldots$

Решение.

Найдем область сходимости. Для этого к ряду из модулей применим признак Коши. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)x^{2n}}=x^2$, $x^2<1$, при $x\in(-1;1)$ - ряд сходится. Значит при этих x выполняется:

$1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots+(-1)^n(2n+1)x^{2n}+\ldots=S(x)$

Проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0;\mathrm{t}]$, где $t\in(-1;1)$. Получим:

$$\int_0^t 1dx-\int_0^t 3x^2dx+\int_0^t 5x^4dx-\int_0^t 7x^6dx+\ldots+(-1)^n\int_0^t(2n+1)x^{2n}dx+\ldots=\int_0^t S(x)dx$$

$$x\Big|_0^t-x^3\Big|_0^t+x^5\Big|_0^t-x^7\Big|_0^t+\ldots+(-1)^n x^{2n+1}\Big|_0^t+\ldots=\int_0^t S(x)dx$$

$$t-0-t^3+0+t^5-0-t^7+0+\ldots(-1)^n\left(t^{2n+1}-0\right)+\ldots=\int_0^t S(x)dx$$

$$t\cdot(1-t^2+t^4-t^6+t^8+\ldots(-1)^n t^{2n}+\ldots)=\int_0^t S(x)dx$$

$$t\cdot\frac{1}{1+t^2}=\int_0^t S(x)dx,\ \left(\frac{t}{1+t^2}\right)'=S(t),\ S(t)=\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Ответ: $\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, при $x\in(-1;1)$

5. Вычислить интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^{\pi}x}$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^{\pi}x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{\pi}x\ dx}{\cos^{\pi}x+\sin^{\pi}x}$$

Сделаем замену переменной: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{2}-x, \quad dt=-dx \\ при \quad x=0, \quad t=\dfrac{\pi}{2}, \quad при \quad x=\dfrac{\pi}{2}, \quad t=0 \end{array}\right]$,

получим

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{\pi} x \;\, dx}{\cos^{\pi} x+\sin^{\pi} x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^{\pi} t \;\, dt}{\cos^{\pi} t+\sin^{\pi} t}$. Сложим эти два одинаковых интеграла:

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{\pi} x \;\, dx}{\cos^{\pi} x+\sin^{\pi} x}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^{\pi} x \;\, dx}{\cos^{\pi} x+\sin^{\pi} x}=\dfrac{\pi}{2}$, откуда $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+tg^{\pi} x}=\dfrac{\pi}{4}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$

Олимпиада 2010

1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{3}-1\right)^n$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(5^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-1\right)^n=\left[1^{\infty}\right]=e^{*}$$, где

$$*=\lim_{n\to\infty}\left(5^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2\right)\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[t=\frac{1}{n}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{5^t+3^t-2}{t}=\left[\begin{array}{l} правило \\ Лопиталя \end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{5^t\cdot\ln 5+3^t\ln 3}{1}=\ln 5+\ln 3,$$

$e^{\ln 5+\ln 3}=15$

Ответ: 15

2. Капитан Сильвер зарыл на необитаемом острове клад. На этом острове растет всего две пальмы: маленькая и большая на расстоянии 400 метров друг от друга. Сильвер сообщил пиратам, что расстояние от клада до маленькой пальмы в три раза больше, чем до большой пальмы. Найти наибольшую длину траншеи, которую возможно придется вырыть пиратам, чтобы точно найти клад.

Решение.

$r_1=\sqrt{(x+200)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-200)^2+y^2}$,

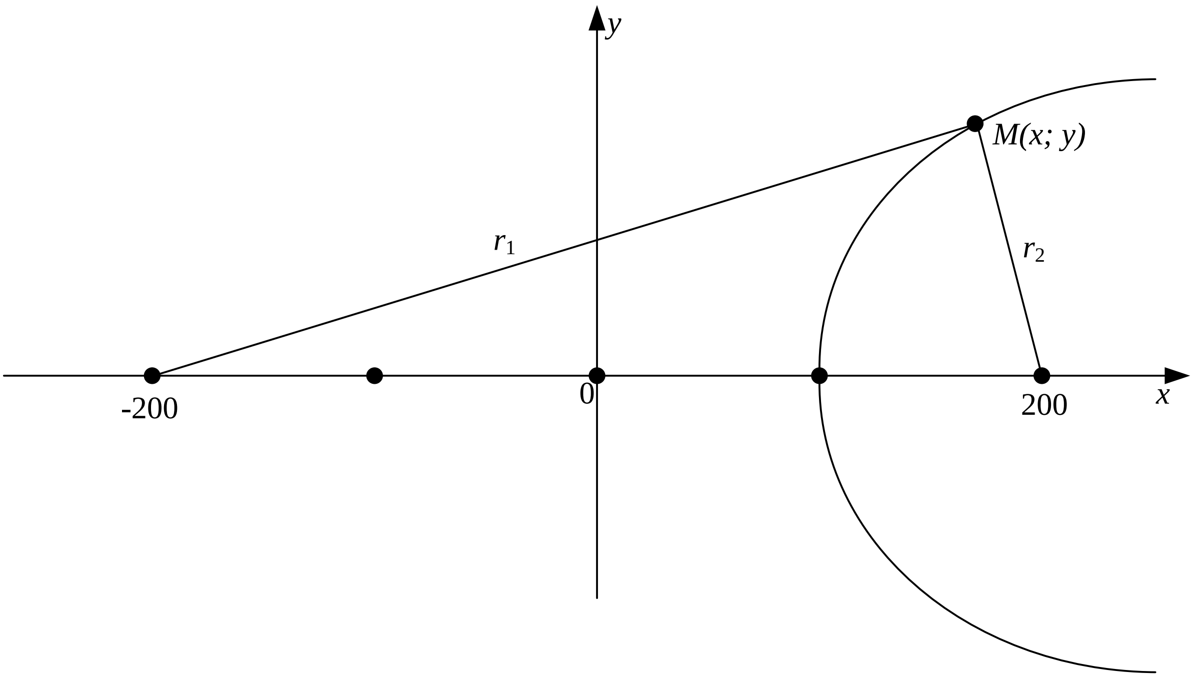
$\sqrt{(x+200)^2+y^2}=3\sqrt{(x-200)^2+y^2}$, $(x+200)^2+y^2=9(x-200)^2+9y^2$,

$(x+200)^2-9(x-200)^2=8y^2$, $x^2+400x+200^2-9x^2+9\cdot 400x-9\cdot 200^2=8y^2$,

$-8x^2+10\cdot 400x-8\cdot 200^2=8y^2$, $x^2-500x+200^2=-y^2$,

$x^2-2\cdot 250x+250^2-250^2+200^2=-y^2$,

$(x-250)^2+y^2=(250-200)\cdot(250+200)$, $(x-250)^2+y^2=150^2$ - окружность с радиусом $R=150$.



Значит наибольшая длина траншеи, которую возможно придется вырыть пиратам, чтобы точно найти клад равна $2\pi R=300\pi$

3. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы в интервале $(a;b)$. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix}=0,$$ где c некоторая точка из $(a;b)$.

Решение.

Функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ на отрезке $[a;b]$ удовлетворяют всем условиям теоремы Лагранжа. Поэтому $\exists c\in(a;b)$, что $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

$g'(c)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$, $h'(c)=\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}$.

Таким образом, третий столбец определителя линейно выражается через первых два, а значит определитель равен нулю.

4. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2010}$

Решение.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{4} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Легко доказать (методом математической индукции), что $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) n=2, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$- утверждение верно.

2) Пусть утверждение верно при $n = k$, т. е $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажем утверждение при $n = k + 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1-k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно методу математической индукции, утверждение верно для всех $n \in N$.

Значит, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & -2010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Найти площадь фигуры, состоящей из всех точек плоскости xOy удовлетворяющих совокупности двух неравенств: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. $(a > b > 0)$

Решение.

Искомая фигура образована объединением двух эллипсов (Рис.1).

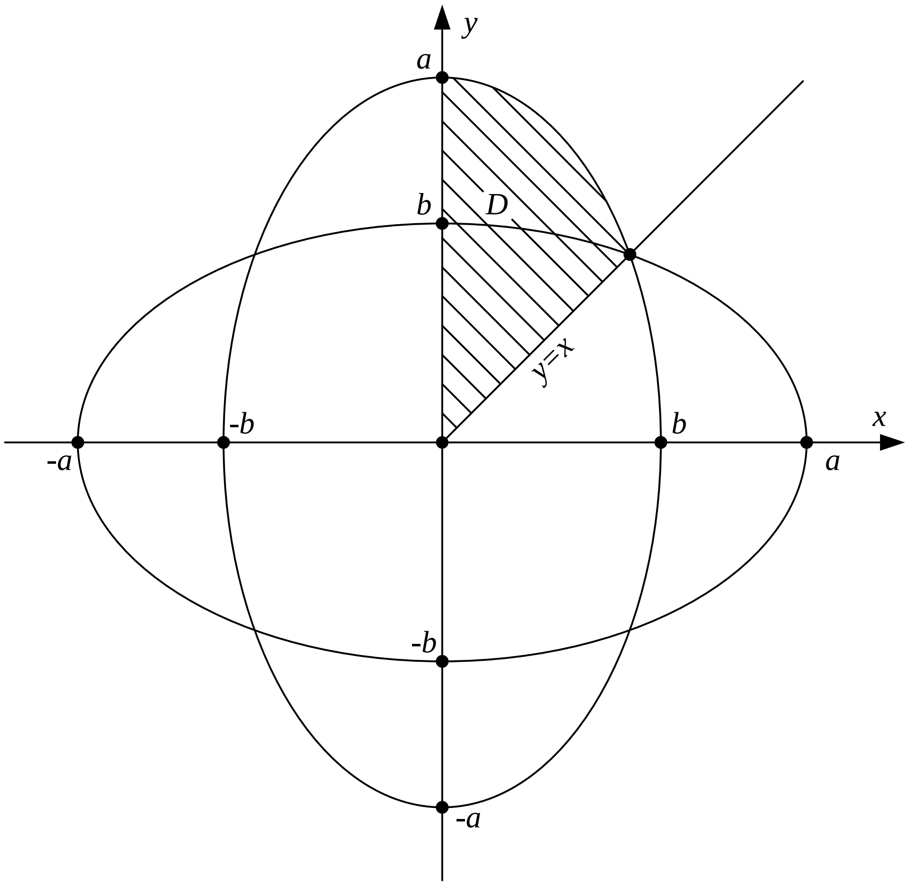


Рис. 1

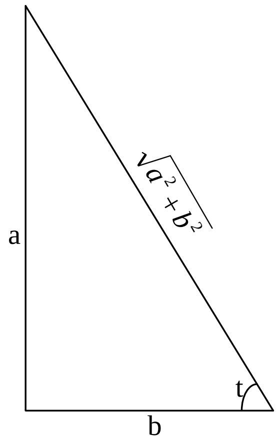


Рис. 2

Найдем площадь области D, что составляет $\frac{1}{8}$ площади искомой фигуры, по формуле $S_1 = \iint\limits_D dxdy$. Чтобы в двойном интеграле перейти к повторному определим, как изменяются пределы интегрирования по x и по y. Для этого найдем абсциссу точки пересечения эллипсов в первой четверти, из условия что эта точка принадлежит прямой $y = x$, решив систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = x \end{cases}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1, \quad x^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2},$$

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Значит x изменяется от 0 до $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

а y изменяется от $y = x$ до $y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$

$$S_1=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}dx\int_x^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}}dy=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}-x\right)dx=\frac{a}{b}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{b^2-x^2}\ dx-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}=$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{b^2-x^2}\ dx-\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Вычислим отдельно интеграл $\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{b^2-x^2}\ dx$, используя замену переменной.

$$\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{b^2-x^2}\ dx=\left[\begin{array}{l} x=b\sin t,\quad dx=b\cos t,\quad при\quad x=0,\quad t=0\\ при\ x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=b\sin t,\ t=\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ или\ t=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ или\ t=arctg\,\frac{a}{b}\quad (См.\ \ Рис.2) \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{arctg\frac{a}{b}}\sqrt{b^2-b^2\sin^2 b}\ b\cos t\ dt=b^2\int_0^{arctg\frac{a}{b}}\cos^2 t\ dt=b^2\int_0^{arctg\frac{a}{b}}\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt=$$

$$b^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{arctg\frac{a}{b}}dt+\frac{1}{2}\int_0^{arctg\frac{a}{b}}\cos 2t dt\right)=$$

$$=\frac{b^2}{2}t\Big|_0^{arctg\frac{a}{b}}+\frac{b^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{arctg\frac{a}{b}}=\frac{b^2}{2}arctg\,\frac{a}{b}+\frac{b^2}{2}\cos t\sin t\Big|_0^{\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ или\ \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}=$$

$$=\frac{b^2}{2}arctg\,\frac{a}{b}+\frac{b^2}{2}\frac{ba}{a^2+b^2}$$

Итак: $S_1=\frac{a}{b}\left(\frac{b^2}{2}arctg\,\frac{a}{b}+\frac{b^2}{2}\frac{ba}{a^2+b^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{ab}{2}arctg\,\frac{a}{b}$

Тогда площадь всей искомой фигуры $S=8\cdot S_1=4ab\ arctg\,\frac{a}{b}$

Ответ: $4ab\ arctg\,\frac{a}{b}$

Олимпиада 2011

1. $f(x)=\sqrt{(1+tg2x)\cdot(1+tg4x)\cdot(1+tg8x)\cdot\ldots\cdot(1+tg2048x)}$

Найти $f'(0)$.

Решение

$$f(x)=(1+tg\,2x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+tg\,4x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+tg\,8x)^{\frac{1}{2}}\cdot\ldots\cdot(1+tg\,2048x)^{\frac{1}{2}}$$

Для нахождения производной $f'(x)$ воспользуемся правилом логарифмической производной: $(\ln f(x))'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, откуда $f'(x)=f(x)\cdot(\ln f(x))'$.

$$f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{1}{2}\ln(1+tg\,2x)+\frac{1}{2}\ln(1+tg\,4x)+\frac{1}{2}\ln(1+tg\,8x)+\ldots+\frac{1}{2}\ln(1+tg\,2048x)\right)'=$$

$$=f(x)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tg\,2x}\frac{1}{\cos^2 2x}2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tg\,4x}\frac{1}{\cos^2 4x}4+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tg\,8x}\frac{1}{\cos^2 8x}8+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tg\,2048x}\frac{1}{\cos^2 2048x}2048\right).$$

Тогда:

$$f'(0)=f(0)\cdot(1+2+4+\ldots+1024)=1\cdot(1+1\cdot 2+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\ldots+1\cdot 2^{10})=$$
$$=\frac{1\cdot(2^{11}-1)}{2-1}=2047$$

2. Существует ли квадратная матрица X, удовлетворяющая уравнению:

$$X^2=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -5\\ 6 & 1 & 7\\ -4 & 5 & 8\end{pmatrix}?$$

Решение.

Известно, что для любой квадратной матрицы справедливо равенство: $|X^2|=|X\cdot X|=|X|\cdot|X|=|X|^2$. Найдём определитель левой и правой частей уравнения.

Определитель матрицы в правой части уравнения равен -344, отрицательное число.

А в левой части уравнения находится квадрат определителя матрицы, то есть неотрицательное число. Значит, такой матрицы X не существует.

3. Докажите, что уравнение $(x-x^3)\cdot f'(x)=(3x^2-1)\cdot f(x)$ имеет хотя бы один корень на отрезке [0,1] . Где $f(x)$- дифференцируемая на отрезке [0; 1] функция.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $F(x)=(x-x^3)f(x)$. Эта функция дифференцируема на отрезке [0; 1], причем:

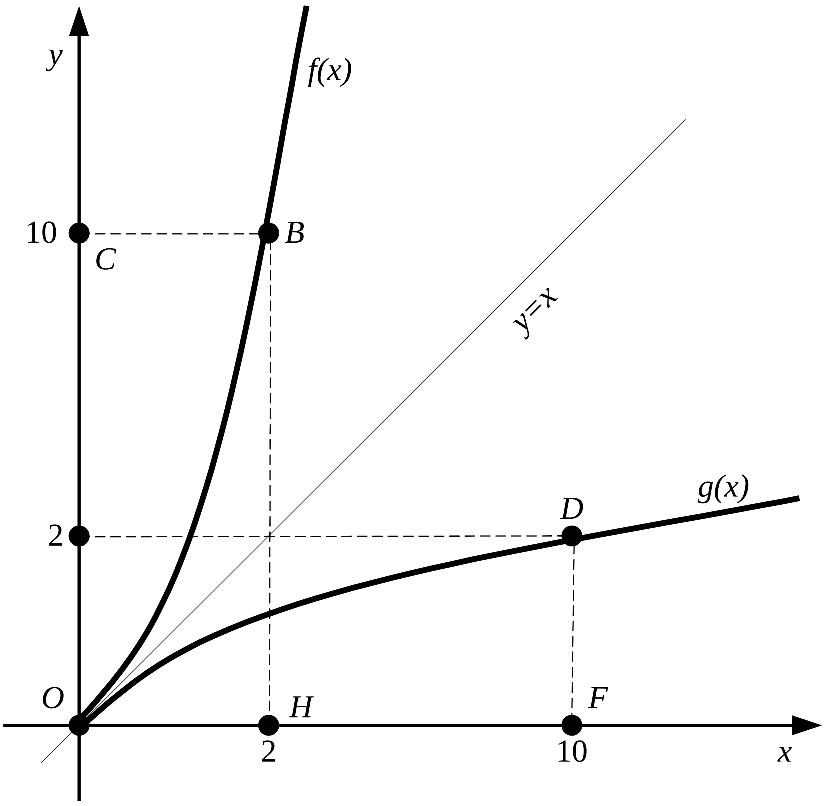
1) $F'(x)=(x-x^3)f'(x)-(3x^2-1)f(x)$,

2) $F(0)=F(1)=0$.

Значит функция $F(x)$ на отрезке [0;1] удовлетворяет условиям теоремы Роля, следовательно существует такая точка $x_0\in(0;1)$, в которой $F'(x_0)=0$, то есть $(x_0-x_0{}^3)f(x_0)-(3x_0{}^2-1)f(x_0)=0$, для любой дифференцируемой на отрезке [0; 1] функции $f(x)$. Что и требовалось доказать.

4. Вычислить $\int_0^{10} g(x)\,dx$, где $g(x)$ - функция, обратная к функции $f(x)=x^3+x$

Решение.



Функция $f(x)=x^3+x$ монотонно возрастает на всей числовой прямой $\left(f'(x)=3x^2+1>0\right)$, а значит имеет себе обратную функцию на всей числовой оси. Изобразим схематично график функции $f(x)=x^3+x$. Тогда график обратной функции, заданной на отрезке [0; 10], будет симметричен относительно биссектрисы первой четверти.

Таким образом площадь криволинейной трапеции *ODF* будет равна площади криволинейной трапеции *OBC*, а её мы найдём как разность площадей прямоугольника *OHBC* и криволинейной трапеции *OHB*.

$$S_{ODF} = 10 \cdot 2 - \int_0^2 f(x)dx = 20 - \int_0^2 (x^3 + x)dx = 20 - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = 14$$

Ответ: $\int_0^{10} g(x)\, dx = 14$

5. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Решение.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{прибавим} \quad \textit{первому} \\ \textit{столбцу} \quad \textit{все} \\ \textit{остальные} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x+4 & x & 1 & 1 & 1 \\ x+4 & 1 & x & 1 & 1 \\ x+4 & 1 & 1 & x & 1 \\ x+4 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{вычтем} \quad \textit{первую} \\ \textit{строку} \quad \textit{из} \\ \textit{всех} \quad \textit{остальных} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+4)(x-1)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Ответ: -4; 1

Олимпиада 2012**.**

Задание 1. Вычислить определитель произвольного порядка n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(элементы побочной диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0).

Решение.

Непосредственно находим: $\Delta_1 = 1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

Вычислим определитель Δ_4 разложением по 1 строке:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \bullet (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 = 1.$$

Аналогично рассуждая, в общем случае получим

$\Delta_n = (-1)^{1+n}\Delta_{n-1} = (-1)^{1+n+1+(n-1)}\Delta_{n-2} = (-1)^{2n+1}\Delta_{n-2} = -\Delta_{n-2}$, откуда

$$\Delta_n = (-1)^2\Delta_{n-4} = \Delta_{n-4}.$$

Таким образом, значения определителя повторяются через 4. Т.к. значения в случаях $n = 1, 2, 3, 4$ вычислены выше, отсюда получим ответ.

Ответ: $\Delta_n = \begin{cases} 1, & n = 4k-3 \text{ или } n = 4k \\ -1, & n = 4k-2 \text{ или } n = 4k-1 \end{cases}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Задание 2. Найти из уравнения $2f(x) + f(2-x) = 2012^x$ неизвестную функцию $f(x)$.

Решение.

Сделав замену переменных $x \to 2-x,$ и учитывая, что $2-(2-x) = x,$ получим:

$$2f(2-x) + f(x) = 2012^{2-x}.$$

Обозначив $A = f(x);\ B = f(2-x)$, получим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2A+B=2012^{x} \\ A+2B=2012^{2-x} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе уравнение; найдем, что $3A=2\bullet 2012^{x}-2012^{2-x}$, откуда

$$f(x)=A=\frac{2\bullet 2012^{x}-2012^{2-x}}{3}.$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{2\bullet 2012^{x}-2012^{2-x}}{3}$.

Задание 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)$.

Решение.

Вычислим вспомогательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\dfrac{1}{4}-\sqrt{4n^2+n}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{4}-\sqrt{4n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n+\frac{1}{4}-\sqrt{4n^2+n}\right)\bullet\left(2n+\frac{1}{4}+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\frac{1}{4}+\sqrt{4n^2+n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n+\frac{1}{4}\right)^2-(4n^2+n)}{2n+\frac{1}{4}+\sqrt{4n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{16}}{2n+\frac{1}{4}+\sqrt{4n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{16n}}{2+\frac{1}{4n}+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=0.$$

Отсюда получим, что $\pi\sqrt{4n^2+n}=\pi\left(2n+\dfrac{1}{4}\right)+\alpha_n$, где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Учитывая это, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\left(2n+\frac{1}{4}\right)+\alpha_n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задание 4. Вычислить интеграл

$$\int\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

Решение. Представим интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

Учтем, что $d\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'dx=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ и, следовательно,

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=e^{x+\frac{1}{x}}d\left(x+\frac{1}{x}\right)=d\left(e^{x+\frac{1}{x}}\right).$$

Применив интегрирование по частям, отсюда получим:

$$\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx \\ du=dx & v=e^{x+\frac{1}{x}} \end{bmatrix}=xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+C$$

Окончательно,

$$\int\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+C=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$$

Ответ: $xe^{x+\frac{1}{x}}+C$.

Задание 5. Решить задачу Коши:

$$\left(1-x^3\right)y''-6x^2y'-6xy=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Решение. Применим формулу Лейбница $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$, где $u=1-x^3,\ v=y$. Т.к. $\left(1-x^3\right)'=-3x^2,\ \left(1-x^3\right)''=-6x$, уравнение приводится к виду

$$\left(\left(1-x^3\right)y\right)''=0.$$

Отсюда находим: $\left(1-x^3\right)y=Ax+B,\quad y=\frac{Ax+B}{1-x^3}.$

Из начального условия $y(0)=1$ находим, что $B=1$, а из условия $y'(0)=1$ – $A=0$. Окончательно, $y=\frac{1}{1-x^3}.$

Ответ: $y=\frac{1}{1-x^3}.$

Олимпиада 2013

Задание 1. Вычислить определитель 10 порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & 3 & ... & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 & 4 & ... & 4 & 4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -9 & -9 & -9 & -9 & ... & 9 & 9 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & ... & -10 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение. Прибавим ко 2 строке 1-ю строку, умноженную на 2, к 3 строке – 1-ю, умноженную на 3, и т.д., к 10 строке – 1-ю, умноженную на 10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & ... & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & ... & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & ... & 8 & 8 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

Получили определитель треугольного вида, который равен произведению элементов главной диагонали: $1\cdot 4\cdot 6\cdot 8...18\cdot 20 = 2^9\cdot 10!$.

Ответ: $2^9\cdot 10!$

Задание 2. Две параболы, заданные уравнениями $x = y^2 - a$ и $y = x^2 - b$, где $a > 0,\ b > 0$, пересекаются в 4 точках. Доказать, что существует окружность, проходящая через эти точки и найти ее центр и радиус.

Решение. Указанные 4 точки удовлетворяют сумме уравнений парабол. Сложив уравнения, получим $x^2 + y^2 = x + a + y + b$,

$(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 = a + b + 0.5$ – уравнение окружности с центром $(0.5, 0.5)$ и радиусом $\sqrt{a+b+0.5}$.

Ответ: координаты центра $(0.5, 0.5)$, радиус $\sqrt{a+b+0.5}$

Задание 3. Функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x = 1$, $f(1) > 0$. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Решение. Т.к. функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 1$, она непрерывна в этой точке, поэтому имеем неопределенность $\left[1^\infty\right]$. Т.к. $f(1) > 0$, в окрестности точки $x = 1$ определена и дифференцируема сложная функция $\ln f(x)$. Раскрывая неопределенность с помощью правила Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln f(x)-\ln f(1)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{(\ln f(x))'}{(\ln x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{xf'(x)}{f(x)}}=e^{\frac{f'(1)}{f(1)}}$$

Ответ: $e^{\frac{f'(1)}{f(1)}}$

Задание 4. Вычислить интеграл $\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$.

Решение: Подводя выражение $x\cos x$ под знак дифференциала, получим:

$$\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{\frac{x}{\cos x}x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{x}{\cos x}\frac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}.$$

Интегрируя по частям, получим $\left[\begin{array}{ll} u=\dfrac{x}{\cos x} & dv=\dfrac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2} \\ du=\dfrac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}dx & v=-\dfrac{1}{x\sin x+\cos x}\end{array}\right]$

$$uv-\int vdu=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\operatorname{tg}x+C$$

Ответ: $-\dfrac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\operatorname{tg}x+C$.

Задание 5. Решить задачу Коши $xy''=y'(e^y-1),\ y(1)=0, y'(1)=1$**.**

Решение: Перепишем уравнение в равносильном виде $xy''+y'=y'e^y$, или $(xy')'=(e^y)'$.

Интегрируя, получим: $xy'=e^y+C$. Подставляя из начальных условий $x=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=1$, получим $1=1+C,\ C=0$.

Осталось решить задачу Коши для уравнения с разделяющимися переменными $xy'=e^y, y(1)=0$. Разделяя переменные, получим:

$$e^{-y}dy=\frac{dx}{x},\ -e^{-y}=\ln|x|+C,\ -e^0=\ln 1+C,\ C=-1.$$

Ответ: $e^{-y}=1-\ln|x|$.

ОЛИМПИАДА -2014

Задание 1. Найти расстояние между линиями, заданными уравнениями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=6x+8y-24$.

Решение. Уравнение $x^2+y^2=1$ задает окружность с центром (0,0) и радиусом $r_1=1$. Уравнение $x^2+y^2=6x+8y-24$ приводится к виду $(x-3)^2+(y-4)^2=1$, это уравнение окружности с центром (3,4) и радиусом $r_2=1$. Т.к. окружности внешние друг к другу, и расстояние между центрами $\sqrt{3^2+4^2}=5$, то расстояние между окружностями равно $5-r_1-r_2=3$.

Ответ: 3.

Задание 2. Пусть $f(x)=f_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_2(x)=f(f(x))$, $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$ при $n\in N$. Найти $f_{2014}(x)$.

Решение. Вычислим: $f_2(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$,

$f_3(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=x$, $f_4(x)=\dfrac{1}{1-x}=f_1(x)$. Таким образом, $f_{n+3}(x)=f_n(x)$.

Т.к. 2014 при делении на 3 дает в остатке 1, $f_{2014}(x)=f_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Ответ: $f_{2014}(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Задание 3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

Решение. Ряд сходится в силу сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$. Преобразуем:

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ .$$

Для частичных сумм ряда получим:

$$S_n=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}};\ \lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2y''-xy'-3y=0$.

Решение. Т.к. исходное уравнение – линейное и однородное 2 порядка, его общее решение имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где y_1,y_2 - пара его линейно независимых решений, C_1,C_2 - произвольные постоянные. Решения будем искать в виде $y=x^k$, т.к. при этом степени выражений по х в левой части будут одинаковы. Подставив, получим: $x^k\left(k(k-1)-k-3\right)=0$, $k^2-2k-3=0$. Решив квадратное уравнение, получим корни $k=3,\ k=-1$.

Т. к. функции $y_1=x^3,\ y_2=\dfrac{1}{x}$ линейно независимы (их отношение не постоянно), общее решение имеет вид $y=C_1x^3+C_2\dfrac{1}{x}$.

Ответ: $y=C_1x^3+C_2\dfrac{1}{x}$.

Другой способ: Перепишем уравнение в равносильном виде: $x^2y''+2xy'-3xy'-3y=0;\quad x\left(xy\right)''-3(xy)'=0$. Сделав замену переменных $z=(xy)'$, получим линейное однородное уравнение 1 порядка $xz'-3z=0$. Отсюда найдем: $z=\tilde{C}_1x^3,\ xy=\dfrac{1}{4}\tilde{C}_1x^4+C_2=C_1x^4+C_2,\ y=C_1x^3+C_2\dfrac{1}{x}$.

Задание 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{arctg\frac{1-x}{1+x}}{x^2+1}dx$.

Решение: Сделаем замену переменных

$$\left[\begin{array}{c} x=tg\,t,\ \dfrac{dx}{x^2+1}=\dfrac{dt}{\cos^2 t(tg^2t+1)}=dt,t_н=-\dfrac{\pi}{4},t_в=\dfrac{\pi}{4} \\ arctg\dfrac{1-x}{1+x}=arctg\dfrac{tg\frac{\pi}{4}-tg\,t}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\,t}=arctg\left(tg\left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}-t \end{array}\right],$$

Получим: $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Другой способ: можно убедиться, что замена переменных $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=\dfrac{1-t}{1+t} \end{array}\right]$

приводит интеграл к виду $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{arctg\,t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}arctg^2t\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{8}$.

ОЛИМПИАДА -2015

Задание 1. Вычислить $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2015}$.

Решение. Пусть $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда: $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E, A^3=-A, A^4=E,$ где $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда: $A^{2015}=A^{2012+3}=\left(A^4\right)^{503}A^3=EA^3=-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 2. В параллелограмме диагонали пересекаются в точке M(3,2), а точки P(2,1) и R(-2,0) лежат на различных параллельных прямых, содержащих стороны параллелограмма. Составить уравнения прямых.

Решение. Точка М является центром симметрии параллелограмма, поэтому указанные прямые проходят через точки P и R'(x1,y1) (где R' симметрична R относительно M) и через точки R и P'(x2,y2) (где P' симметрична P относительно M). Следовательно, $\frac{x1-2}{2}=3, \frac{y1}{2}=2$, откуда $x1=8, y1=4$, а также: $\frac{x2+2}{2}=3, \frac{y2+1}{2}=2, x2=4, y2=3$.

Запишем уравнения прямых по 2 точкам: $PR':\frac{x-2}{8-2}=\frac{y-1}{4-1}$ или $y=\frac{x}{2}$; $RP':\frac{x+2}{4+2}=\frac{y}{3}$ или $y=\frac{x}{2}+1$. **Ответ**: $y=\frac{x}{2}$ и $y=\frac{x}{2}+1$.

Задание 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

Решение. 1 способ. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{2(x^4+x^3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2+x^{-1}}=\frac{1}{2}.$$

2 способ. Из разложения $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...$ следует, что при $n\to\infty$ имеет место асимптотика $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, откуда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-o(1)\right)=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $1/2$.

Задание 4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n}$.

Решение: Заметим, что $\cos\frac{2\pi n}{3}=1$ при $n=3k$, где $k\in N$; в остальных случаях $n=3k-2,\, n=3k-1$ имеем $\cos\frac{2\pi n}{3}=-\frac{1}{2}$. Отсюда следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k}{2^{3k}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k-2}{2^{3k-2}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k-1}{2^{3k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-6k+5}{8^k}.$$

При $|x|<1$, почленно дифференцируя равенство $1+x+x^2+x^3+x^4+...=\frac{1}{1-x}$, и умножая на x, получим: $x+2x^2+3x^3+4x^4+...=\frac{x}{(1-x)^2}$.

Подставляя $x=\frac{1}{8}$, в итоге будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-6k+5}{8^k}=-\frac{\frac{6}{8}}{\left(1-\frac{1}{8}\right)^2}+\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{8}}=-\frac{48}{49}+\frac{5}{7}=-\frac{13}{49}.$$

Ответ: $-\frac{13}{49}$.

Задание 5. Функция $y(x)$ является решением задачи Коши $y'=\frac{1}{x^2+y^2+1}$, $y(0)=1$**.** Выразить $\int_0^1 xy(x)dx$ через $y(1)=a$.

Решение: Применим формулу интегрирования по частям и $y(1)=a$:

$$\int_0^1 xy(x)dx=\int_0^1 y(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right)=y(x)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dy(x)=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2y'(x)dx.$$

Из заданного уравнения выразим: $x^2y'(x)=1-y'(x)(y^2(x)+1)$. Получим:

$$\int_0^1 xy(x)dx=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_0^1 y'(x)(y^2(x)+1)dx=\begin{bmatrix} y=y(x), dy=y'(x)dx \\ y(0)=1,\ y(1)=a\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{a-1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^a(y^2+1)dy=\frac{a-1}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y}{2}\Big|_1^a=a-1+\frac{a^3-1}{6}.$$

Ответ: $a-1+\dfrac{a^3-1}{6}$.