Решение краевых задач для дифференциальных уравнений

1. Сведение краевой задачи к двум задачам Коши.

Краевой задачей для линейного дифференциального неоднородного уравнения (ЛНДУ) второго порядка называют задачу вида:

$$\begin{cases} l(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ l_1(y)_{x=0} = \alpha y(0) + \beta y'(0) = A \\ l_2(y)_{x=l} = \gamma y(l) + \delta y'(l) = B \end{cases}, \qquad (1.1)$$

где $p(x), q(x), y(x), f(x)$ – достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на отрезке [0,l] функции, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – заданные постоянные коэффициенты.

Одним из методов решения краевой задачи является метод ее сведения к двум задачам Коши. Он позволяет применить численные методы решения задачи Коши к решению краевых задач. Метод базируется на том, что искомое решение представляют в виде

$$y(x) = U(x) + C \cdot V(x). \qquad (1.2)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к ДУ:

$$U'' + p(x)U' + q(x)U + C \cdot (V'' + p(x)V' + q(x)V) = f(x). \qquad (1.3)$$

Потребуем, чтобы $V(x)$ удовлетворяла ЛОДУ.

$$V'' + p(x)V' + q(x)V = 0; \qquad (1.4)$$

Тогда функция $U(x)$ будет удовлетворять соответствующему ЛНДУ.

$$U'' + p(x)U' + q(x)U = f(x). \qquad (1.5)$$

Подстановка (1.2) в краевые условия приводит к системе выражений для определения начальных условий и константы C:

$$\alpha \cdot U(0) + \beta \cdot U'(0) + C \cdot (\alpha \cdot V(0) + \beta \cdot V'(0)) = A; \qquad (1.6)$$

$$\alpha \cdot U(l) + \beta \cdot U'(l) + C \cdot (\alpha \cdot V(l) + \beta \cdot V'(l)) = B. \qquad (1.7)$$

Из (1.6) получим начальные условия, а формулу для определения коэффициента *C* из (1.7). Для определенности, возьмем значение функции *V* (0) = 1. Тогда для того, чтобы *C* не учитывался в определении начальных условий, необходимо, чтобы скобка в выражении (1.6) обратилась в ноль. Для этого достаточно положить $V'(0) = -\alpha/\beta$, $\beta \neq 0$. Таким образом, для ЛОДУ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} V'' + p(x) \cdot V' + q(x) \cdot V = 0 \\ V(0) = 1,\ V'(0) = -\alpha/\beta,\ \beta \neq 0 \end{cases}. \qquad (1.8)$$

Для ЛНДУ достаточно положить $U(0) = A/\alpha, \alpha \neq 0$, откуда $U'(0) = 0$. Записываем вторую задачу Коши:

$$\begin{cases} U'' + p(x) \bullet U' + q(x) \cdot U = f(x) \\ U(0) = A/\alpha, \alpha = 0, U'(0) = 0 \end{cases}. \tag{1.9}$$

Таким образом, краевая задача для дифференциального уравнения свелась к двум задачам Коши для ЛОДУ и ЛНДУ второго порядка. После того как решение задач Коши найдено численно или аналитически, найдем константу *C*. Для этого воспользуемся условием (1.7), из которого следует, что

$$C = \frac{B - \gamma \cdot U(l) - \delta \cdot U'(l)}{\gamma \cdot V'(l) + \delta \cdot V'(l)}. \tag{1.10}$$

Линейная комбинация (1.2) с учетом решений (1.8) - (1.10) будет искомым решением исходной краевой задачи.

2. Сведение неоднородных краевых условий к однородным. Метод коллокаций

Пусть имеется краевая задача (1.1) с неоднородными краевыми условиями. При подборе системы линейно-независимых функций, используемых при аналитическом построении решения, желательно иметь однородные краевые условия. Преобразуем неоднородные краевые условия задачи (1.1) в однородные при помощи замены переменных:

$$y = \tilde{y} + kx + b.$$

Константы k и b подберем с учетом краевых условий из системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha\,\tilde{y}(0) + \beta\tilde{y}(0) + \alpha(0 + b) + \beta k = A \\ \gamma\,\tilde{y}(l) + \delta\,\tilde{y}'(l) + \gamma\,(kl + b) + k\delta = B \end{cases}.$$

Потребуем, чтобы k и b были решением системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha b + \beta k = A \\ \gamma b + (\gamma l + \delta) k = B \end{cases}.$$

Тогда

$$b = \frac{\begin{vmatrix} A & \beta \\ B & \gamma l + \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma l + \delta \end{vmatrix}}, \quad k = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & A \\ \gamma & B \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Первая и вторая производные решения приобретают следующий вид:

$$y' = \tilde{y}' + k, \quad y'' = \tilde{y}'',$$

а исходная краевая задача превращается в следующую задачу с однородными краевыми условиями:

$$l(\tilde{y}) = \tilde{y}'' + p(x)(\tilde{y}' + k) + q(x)(\tilde{y} + kx + b)) = f^*(x), \qquad (1.11)$$

$$l_1(\tilde{y})_{x=0} = \alpha\,\tilde{y}(0) + \beta\,\tilde{y}'(0) = 0, \qquad (1.12)$$

$$l\,(\tilde{y})_{x=l} = \gamma\,\tilde{y}(l) + \delta\,\tilde{y}'(l) = 0\,, \qquad (1.13)$$

$$f^*(x) = f(x) - p(x)k - q(x)(kx + b)\,. \qquad (1.14)$$

Рассмотрим метод построения приближенного решения поставленной краевой задачи в аналитической форме записи, называемый *методом коллокаций* (от англ. collocation – выровненное размещение).

Пусть имеется система линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$, i=1..n, каждая их которых удовлетворяет краевым условиям (1.12) и (1.13). Если решение задачи (1.11)-(1.12) представить в виде

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi_i(x)\,, \qquad (1.15)$$

то, в силу линейности краевых условий они будут удовлетворены. Но на всем рассматриваемом интервале [0,l] разность между левой и правой частями дифференциального уравнения, называемая *невязкой*, не будет равна нулю,

$$l\,(\tilde{y}) - f^*(x) \neq 0\,.$$

Невязка решения дифференциального уравнения, обозначаемая $\Psi(x) = l\,(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi_i(x)) - f^*(x)$, содержит n неизвестных констант c_i. Приравнивая невязку $\Psi(x)$ к нулю в n внутренних точках интервала, получаем систему из n линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_1)) = f^*(x_1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_2)) = f^*(x_2), \\ \qquad\qquad \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i l(\varphi_i(x_n)) = f^*(x_n), \end{cases}, \qquad (1.16)$$

записанную относительно неизвестных констант. После определения констант из системы (1.16) строится приближенное решение однородной краевой задачи в форме (1.15).

Решение исходной неоднородной задачи получается добавлением к функции $\tilde{y}$ линейной функции $kx+b$, определенной выше:

$$y \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) + kx + b\,.$$

Пример решения краевой задачи в среде Maple приведен ниже.

Пример 1. На отрезке [0,1] решить методом коллокаций краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{array}{l} y'' + x \cdot y' + x^2 \cdot y = x(x-1) \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{array}.$$

Возьмем для построения решения три линейно независимые функции, удовлетворяющие краевым условиям.

```
>restart:
>x:='x':y:=unapply(a1*x*(x-1)+a2*x^2*(x-1)+a3*x^3*(x-1),x);#Построение приближенного решения, удовлетворяющего краевым условиям, в виде суммы трех слагаемых
```

$$y := x \to a1\ x\ (x-1) + a2\ x^2\ (x-1) + a3\ x^3\ (x-1)$$

```
>nv:=unapply(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x);#Задание функции невязки
```

$$\begin{aligned} nv := x \to\ & 2\ a1 + 2\ a2\ (x-1) + 4\ a2\ x + 6\ a3\ x\ (x-1) + 6\ a3\ x^2 \\ & + x\ (a1\ (x-1) + a1\ x + 2\ a2\ x\ (x-1) + a2\ x^2 + 3\ a3\ x^2\ (x-1) + a3\ x^3) \\ & + x^2\ (a1\ x\ (x-1) + a2\ x^2\ (x-1) + a3\ x^3\ (x-1)) - x\ (x-1) \end{aligned}$$

```
>l1:=nv(1/4);l2:=nv(1/2);l3:=nv(3/4);# нахождение значений невязки в точках коллокации
```

$$l1 := \frac{477}{256}\ a1 - \frac{595}{1024}\ a2 - \frac{3203}{4096}\ a3 + \frac{3}{16}$$

$$l2 := \frac{31}{16}\ a1 + \frac{27}{32}\ a2 - \frac{9}{64}\ a3 + \frac{1}{4}$$

$$l3 := \frac{581}{256}\ a1 + \frac{2623}{1024}\ a2 + \frac{8973}{4096}\ a3 + \frac{3}{16}$$

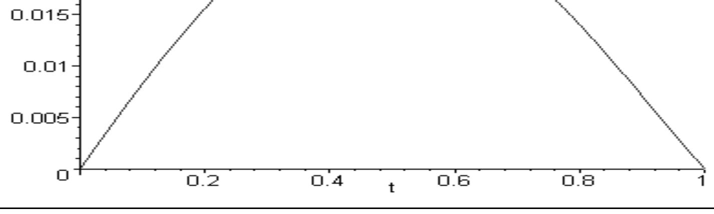
```
>s2:=solve({l1=0,l2=0,l3=0},{a1,a2,a3});assign(s2);#Составление и решение системы линейных уравнений
```

$$s2 := \{a3 = \frac{14949184}{147083039}, a2 = \frac{-12533312}{147083039}, a1 = \frac{-12435380}{147083039}\}$$

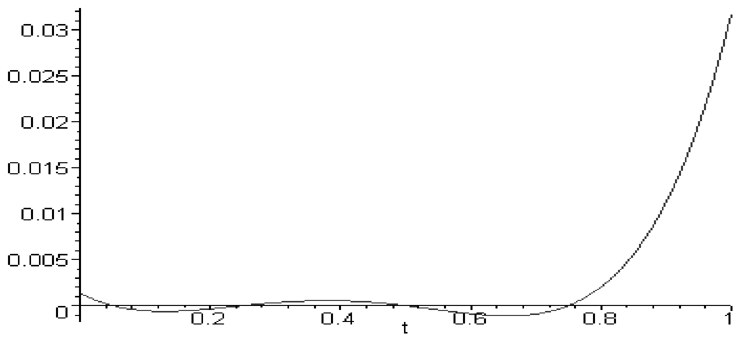
```
>evalf(y(x));#Оценка приближенного решения
```

$$-.08454666211\ x\ (x - 1.) - .08521249007\ x^2\ (x - 1.) + .1016377150\ x^3\ (x - 1.)$$

```
>plot(y(x),x=0..1,color=red);#Построение графика приближенного решения
```



```
>plot(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-1),x=0..1);#Построение графика невязки для оценки погрешности приближенного решения
```



Из графика следует, что максимальная погрешность имеет величину около 0.03 и наблюдается на правой границе отрезка.

3. Метод Бубнова-Галеркина

Для линейной краевой задачи $l(y) = f(x)$ с однородными краевыми условиями $l_1(y) = 0$ и $l_2(y) = 0$ подбирают систему функций $\{\ \varphi_i(x)\ \}$ так, чтобы эти функции были линейно независимы и удовлетворяли однородным краевым условиям:

$$l_1(\varphi_i(x))\,|_{x=0} = 0 \text{ и } l_2(\varphi_i(x))\,|_{x=l} = 0\,.$$

Рекомендуется, чтобы функции $\{\ \varphi_i(x)\ \}$ были ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\left(\varphi_i(x),\ \varphi_j(x)\right) = \int_0^l \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0\,.$$

Приближенное решение дифференциального уравнения отыскивается в виде суммы

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x)\,.$$

Для нахождения констант C_i составляют систему уравнений, требуя ортогональности невязки решения $\psi(x) = l(y^*) - f(x)$ каждой функции φ_i в смысле скалярного произведения. Таким образом, получают систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_1(x)) = (f(x), \varphi_1(x)) \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_2(x)) = (f(x), \varphi_2(x)) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (l(\varphi_i(x)), \varphi_n(x)) = (f(x), \varphi_n(x)) \end{cases}, \tag{1.17}$$

имеющую единственное решение.

После определения значений неизвестных констант из системы (1.17), получается приближенное решение исходной задачи в аналитической форме записи

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x). \tag{1.18}$$

Приводимый ниже пример применения метода иллюстрирует его возможности. Решается та же краевая задача, что и в примере 1.20.

Пример 2. На отрезке [0,1] решить методом Бубнова – Галеркина краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & y'' + x \cdot y' + x^2 \cdot y = x(x-1) \\ & y(0) = 0,\ y(1) = 0 \end{aligned}.$$

```
 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОД БУБНОВА_ГАЛЕРКИНА
>restart:
>y:=unapply(a1*sin(Pi*x)+a2*sin(2*Pi*x)+a3*sin(3*Pi*x)+a4*sin(4
*Pi*x),x);# Построение приближенного решения
```

$y := x \to a1\ \sin(\pi x) + a2\ \sin(2\ \pi x) + a3\ \sin(3\ \pi x) + a4\ \sin(4\ \pi x)$

```
>nv1:=unapply(diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*(x-
1),x);# Функция невязки решения
```

$$nv1 := x \to -a1 \sin(\pi x)\,\pi^2 - 4\,a2 \sin(2\,\pi x)\,\pi^2 - 9\,a3 \sin(3\,\pi x)\,\pi^2 - 16\,a4 \sin(4\,\pi x)\,\pi^2 \\ + x\,(a1 \cos(\pi x)\,\pi + 2\,a2 \cos(2\,\pi x)\,\pi + 3\,a3 \cos(3\,\pi x)\,\pi + 4\,a4 \cos(4\,\pi x)\,\pi) \\ + x^2\,(a1 \sin(\pi x) + a2 \sin(2\,\pi x) + a3 \sin(3\,\pi x) + a4 \sin(4\,\pi x)) - x\,(x-1)$$

```
>l1:=int(nv1(x)*sin(Pi*x),x=0..1);l2:=int(nv1(x)*sin(2*Pi*x),x=
0..1);l3:=int(nv1(x)*sin(3*Pi*x),x=0..1);l4:=int(nv1(x)*sin(4*P
i*x),x=0..1);#   Ортогональность   невязки   линейно-независимым
функциям, используемым при построении решения по (3.51)
```

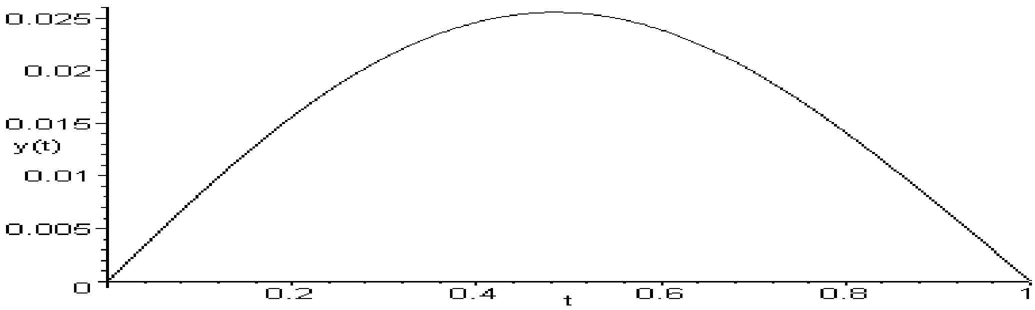
$$l1 := -\frac{1}{3600}(1800\,a1\,\pi^5 - 1350\,\pi^3\,a3 + 2400\,a2\,\pi^3 + 3200\,a2\,\pi + 900\,a1\,\pi + 256\,a4\,\pi \\ + 300\,a1\,\pi^3 + 960\,a4\,\pi^3 - 675\,a3\,\pi - 14400) \Big/ \pi^3$$

$$l2 := -\frac{1}{3600}(-2400\,a4\,\pi^2 + 4320\,a3\,\pi^2 + 3456\,a3 - 800\,a4 + 3200\,a1 + 300\,a2\,\pi^2$$
$$- 2400\,a1\,\pi^2 + 7200\,a2\,\pi^4 + 225\,a2)\,/\,\pi^2$$
$$l3 := \frac{1}{529200}(-508032\,a2\,\pi - 198450\,a1\,\pi^3 - 14700\,a3\,\pi - 518400\,a4\,\pi + 635040\,a2\,\pi^3$$
$$+ 99225\,a1\,\pi + 78400 - 907200\,a4\,\pi^3 - 44100\,\pi^3\,a3 - 2381400\,a3\,\pi^5)\,/\,\pi^3$$
$$l4 := -\frac{1}{705600}(-188160\,a1\,\pi^2 + 470400\,a2\,\pi^2 + 50176\,a1 + 691200\,a3 + 5644800\,a4\,\pi^4$$
$$+ 58800\,a4\,\pi^2 - 1209600\,a3\,\pi^2 - 156800\,a2 + 11025\,a4)\,/\,\pi^2$$

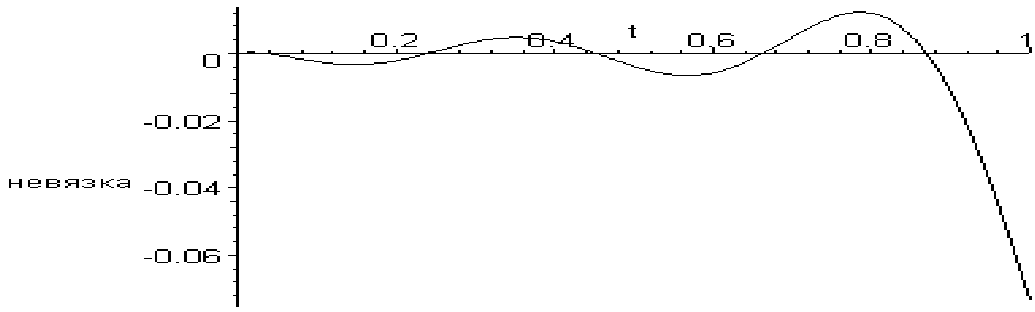
```
>s1:=solve({l1=0,l2=0,l3=0,l4=0},{a1,a2,a3,a4}):assign(s1);
#Составление и решение системы уравнений относительно неизвестных констант a1,a2,a3,a4
>evalf(y(x));# Оценка вида приближенного решения
```

$$.02545617921\ \sin(3.141592654\ x) + .0007481628720\ \sin(6.283185308\ x)$$
$$- .00008083082153\ \sin(9.424777962\ x) + .00007581343845\ \sin(12.56637062\ x)$$

```
>plot(y(t),t=0..1,color=black,labels=["t","y(t)"]);#Построение графика приближенного решения
```




```
>plot(diff(y(t),t$2)+t*diff(y(t),t)+t^2*y(t)-t*(t-1),t=0..1,color=black,labels=["t","невязка"]);#построение графика невязки
```



Из графика следует, что максимальная погрешность имеет величину около 0.06 и наблюдается на правой границе отрезка.

4. Метод прогонки

Изложим метод прогонки для решения краевой задачи вида (1.1):

$$\begin{cases} l(y) = y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x) \\ l_1(y)\big|_{x=0} = \alpha\cdot y + \beta\cdot y'\big|_{x=0} = A \\ l_2(y)\big|_{x=l} = \gamma\cdot y + \delta\cdot y'\big|_{x=l} = B \end{cases}.$$

Для построения приближенного решения задачи (1.1) введем дискретно заданную функцию y_n определенную в $n+1$ точке на $[0,l], 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l$. Она в узлах $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l$ имеет те же значения, которые имеет и решение исходной задачи.

Справедливы следующие приближенные равенства для первой и второй производных искомого решения:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, i = 0,\ldots,n-1, \sim o(1), h \to 0,$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}, i = 0,\ldots,n-2, \sim o(1), h \to 0,$$

где $o(1) = C\cdot h, h \to 0$ – порядок погрешности относительно шага h.

Используя дискретно заданную функцию y_n, можно систему (1.1) свести к системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{l}(y) = \dfrac{y_{i+2} - 2\cdot y_{i+1} + y_i}{h^2} + p(x_i)\cdot\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i)\cdot y_i = f(x_i) \\ \tilde{l}_1(y) = \alpha\cdot y_0 + \beta\cdot\dfrac{y_1 - y_0}{h} = A \\ \tilde{l}_2(y) = \gamma\cdot y_{n-1} + \delta\cdot\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{cases} \qquad (1.19)$$

Заменим краевую задачу (1.1) краевой задачей (1.19), при $i = 0,\ldots,n-2$. Решение системы (1.19) при $h \to 0$ стремится к точному решению задачи (1.1), то есть схема (1.2) аппроксимирует исходную задачу.

Система (1.19) – это система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_i, где введено обозначение $h = x_{i+1} - x_i$. В развернутой форме записи она имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
y_0 \cdot (\alpha \cdot h - \beta) + \beta \cdot y_1 = A \cdot h \\
y_0 \cdot (q_0 \cdot h^2 - p_0 \cdot h + 1) + y_1 \cdot (p_0 \cdot h - 2) + y_2 = f_0 \cdot h^2 \\
y_1 \cdot (q_1 \cdot h^2 - p_1 \cdot h + 1) + y_2 \cdot (p_1 \cdot h - 2) + y_3 = f_1 \cdot h^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{n-2} \cdot (q_{n-2} \cdot h^2 - p_{n-2} \cdot h + 1) + y_{n-1} \cdot (p_{n-2} \cdot h - 2) + y_n = f_{n-2} \cdot h^2 \\
y_{n-1} \cdot (\gamma \cdot h - \delta) + y_n \cdot \delta = B \cdot h
\end{cases} \qquad (1.20)
$$

Эта система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных значений дискретной функции y_n относится к СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$
\begin{cases}
y_0 \cdot a_0 + y_1 \cdot b_1 = A_0 \\
y_0 \cdot a_1 + y_1 \cdot b_2 + y_2 = A_1 \\
\_\_\_\_\_ y_1 \cdot a_2 + y_2 \cdot b_3 + y_3 = A_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ y_{n-2} \cdot a_{n-1} + y_{n-1} \cdot b_n + y_n = A_{n-1} \\
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ y_{n-1} \cdot a_n + y_n \cdot b_{n+1} = A_n
\end{cases} \qquad (1.21)
$$

Для решения систем с такими матрицами применяется метод прогонки. *Метод прогонки* – это метод последовательного исключения неизвестных, начиная с первого уравнения с учётом специфики матрицы С. Алгоритм состоит в решении, начиная с первого, каждого уравнения относительно переменной с меньшим индексом и последующей подстановке полученного решения с следующее уравнение. В результате, при прямом ходе метода прогонки, из последнего уравнения находят значение y_n. При обратном ходе метода находятся все остальные неизвестные.

Пример 3. Найти решение краевой задачи методом прогонки.

$$y'' + x \cdot y' + x^2 y = x(x-1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Запишем систему разностных уравнений в соответствии с (1.21)

$$
\begin{cases}
y_0 = 0, \\
y_{i+2} + (x_i \cdot h - 2) \cdot y_{i+1} + y_i (1 - x_i \cdot h + h^2 \cdot x_i^2) = x_i (x_i - 1) \cdot h^2, i = 0,2,3....(n-2), \\
y_n = 0.
\end{cases}
$$

Решение осуществим методом прогонки, использовав средства Maple.

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

```
>restart:n:=10;b:=1.;a:=0;h:=(b-a)/n: x:=array(1..n+1):
y:=array(1..n+1): s[i]:=array(1..n+1):#Задание числа участков,
концов отрезка, вычисление шага, определение матриц
```

$n := 10 \quad b := 1. \quad a := 0$

```
>y[1]:=0;x[1]:=0;for I from 1 to n do x[i+1]:=x[1]+i*h;od:
p:=unapply(x^2*h^2-x*h+1,x); q:=unapply(x*h-2,x); #Задание
узловых значений для переменной x и коэффициентов системы
уравнений
```

$p := x \to .01000000000\, x^2 - .1000000000\, x + 1 \quad q := x \to .1000000000\ \ x - 2$

```
>for i from 1 to n-1 do
s[i]:=solve(y[i]*p(x[i])+y[i+1]*q(x[i])+y[i+2]=x[i]*(x[i]-
1)*h^2,{y[i+1]}); assign(s[i]); od;
```

$s_1 := \{y_2 = .5000000000\, y_3\} \quad s_2 := \{y_3 = .6689186929\, y_4 + .0006020268236\}$

$$s_3 := \{y_4 = .001654010075 + .7551774319 y_5\}$$

$$s_4 := \{y_5 = .002996348385 + .8085393195\, y_6\}$$

$$s_5 := \{y_6 = .004466173567 + .8456598188 y_7\}$$

$s_6 := \{y_7 = .005901246899 + .8737371046\, y_8\} \quad s_7 := \{y_8 = .007143091829 + .8964255022 y_9\}$

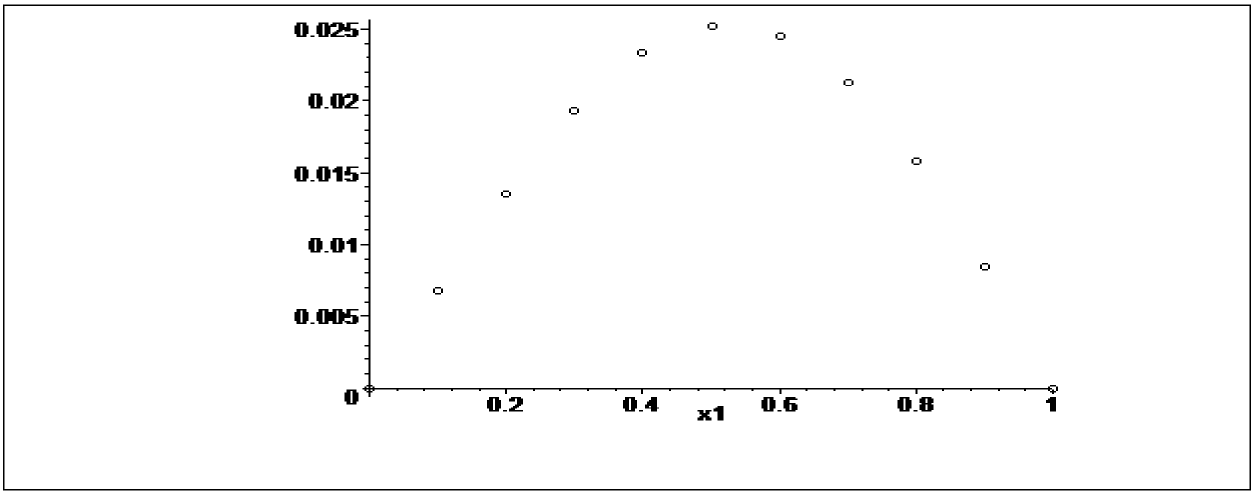
$$s_8 := \{y_9 = .008039033726 + .9158081135\, y_{10}\}$$

$$s_9 := \{y_{10} = .008442889124 + .9331880611\, y_{11}\}$$

```
>y[n+1]:=0;#Краевое условие на правом краю
```

$$y_{11} := 0$$

```
>for i from 1 to n+1 do eval(y[i]);od:# Формирование решения,
полученного при обратном ходе метода прогонки по приведенным
выше  формулам
> l := [[ x[i1], Y[i1]] $i1=1..n+1]:#Формирование списка для
построения графика
> plot(l, x1=0..n*h, style=point,symbol=circle,color=black);#
построение графика решения
```


0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x1