Основы теории вероятностей

1.1. События. Действие над событиями. Полные группы событий.

Определение. Случайным событием(элементарным) назовем один из возможных исходов какого-нибудь опыта, о появлении которого заранее ничего нельзя

Обозначим элементарные события – исходы опыта; буквами с индексами , ,... $\omega 1$ $\omega 2$ (омега один, омега два и т.д.)

Пример. Монета: $\omega 1$ - «орел», ω 2 - «решка» Кубик: $\omega 1$ $\omega 2 \omega$ 3… $\omega 6$

Определение. Пространство элементарных событий (ПЭС) – некоторое множество элементарных событий, которые могут произойти при проведении какого-нибудь опыта: $=\{\omega 1 ,\omega 2 ,...,\omega n \}$

Монета: $=\{\omega 1, \omega 2\}$ 2 элементарных события Кубик: $=\{\omega 1, \omega 2, \ldots, \omega 6\}$ -6 событий

2 кубика: 36 событий $\omega 11=\{1,1\}, \omega 12=\{1,2\}, \ldots, \omega 16=\{1,6\}$ …………………………………… $\omega 61=\{6,1\}, \omega 62=\{6,2\}, \ldots, \omega 66=\{6,6\}$	$\begin{pmatrix} \omega 11 & \ldots & \omega 16 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega 61 & \ldots & \omega 66 \end{pmatrix}$

Если при проведении опыта n раз оказалось, что некоторое события С встречается m_c раз, то частота $\frac{m_c}{n}$ колеблется около вполне определенного числа; причем $\frac{m_c}{n} \to P(c)$ стремится в пределе к числу $P(c)$ при увеличении числа опытов n.

Пример. При бросании монеты сто раз «орел» выпал 48 раз, а «решка» -52 раза, тогда $n = 100;\ m_o = 48, m_p = 52$, а числа $P(o) = 0{,}48$ и $P(p) = 0{,}52$ - близки.

Будем рассматривать ПЭС, которые будем считать равновозможными.

Действия над событиями:

Определение. Суммой 2-х событий c1, c 2 назовем событие c1+c2=c1 U c2, которое происходит, если c1 происходит или c2 происходит или наблюдаются оба эти события.

Определение. Произведением (пересечением) событий c1, c2 назовем событие c1·c2=c1∩c2, которое происходит, если и c1 и c2 происходят одновременно.

Определение. Дополнением события c1 до c2 назовем событие c1\c2 , которое происходит, если происходит c1, но при этом не происходит c2

Пример. C1={ω1,ω3,ω5,ω7 } C2={ω2,ω3,ω4,ω5,ω6 }

C1+C2={ω1,ω2,ω3,ω4,ω5,ω6,ω7 }

C1·C2={ω3,ω5 }

C1\C2={ω1,ω7 }

Определение. События, полученные при помощи действий над событиями из ПЭС, будем называть составными событиями.
Определение. Событие U, которое заведомо произойдет, будем называть событием достоверным.
Определение. Событие $\varnothing$ – которое заведомо не произойдет, назовем невозможным событием.

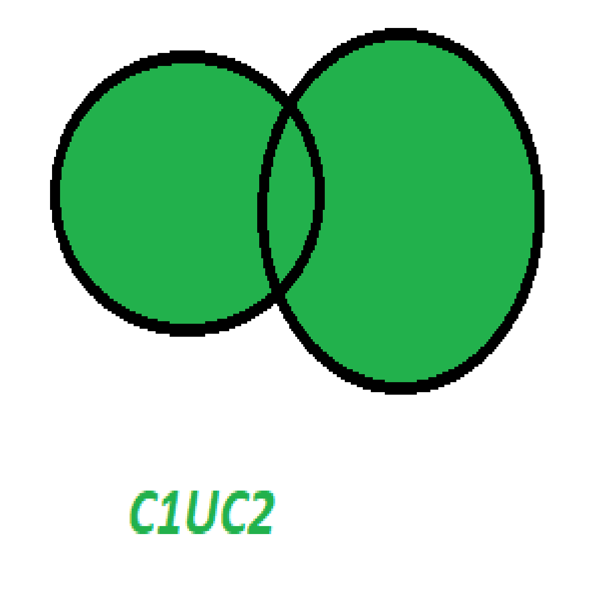
Свойства действий над событиями:

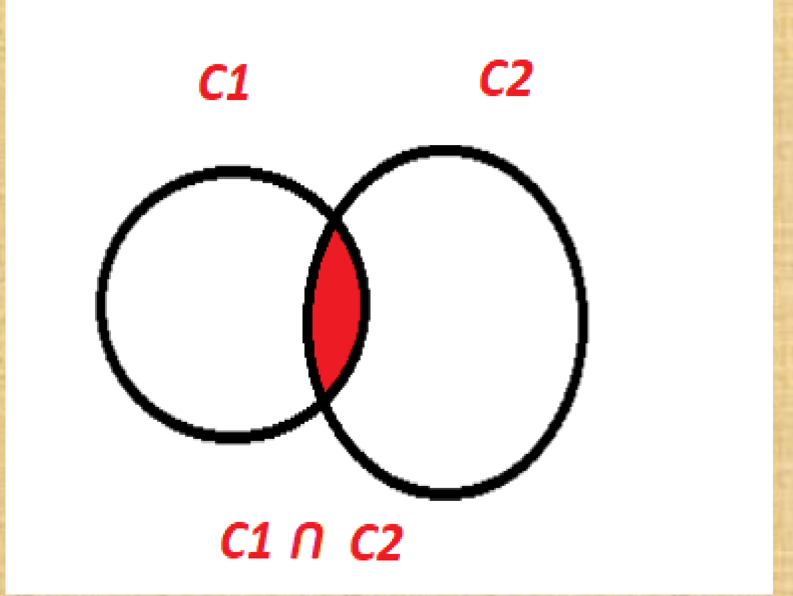
1) $c1+c2=c2+c1$
2) $(c1+c2)+c3=c1+(c2+c3)$
3) $c1 \cdot c2=c2 \cdot c1$
4) $(c1 \cdot c2) \cdot c3=c1 \cdot (c2 \cdot c3)$
5) $c1\,(c2+c3)=c1 \cdot c2+c1 \cdot c3$
6) $C+U=U \quad C \cdot U=C$

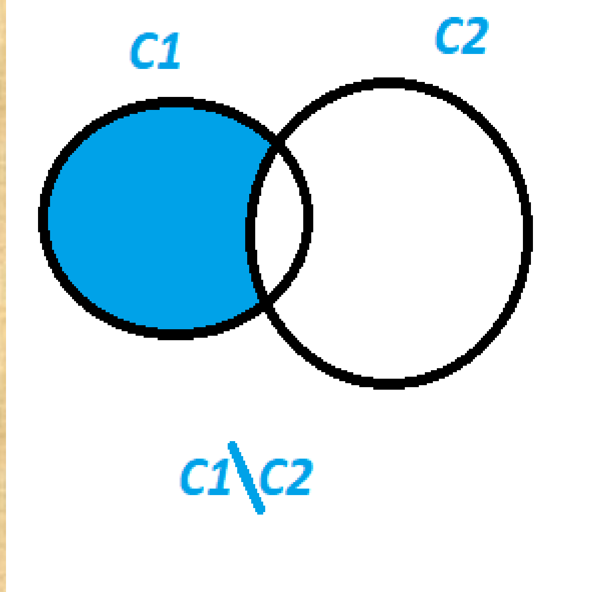
   $C+\varnothing=C \qquad C \cdot \varnothing=\varnothing$

Определение. 2 произвольных события назовем несовместными, если их произведение является невозможным событием. $c1 \cdot c2=\varnothing$.

ДИАГРАММЫ ВЕННА







ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Определение. Полной группой событий (ПГС) назовем такое множество элементарных событий $\{\omega 1, \omega 2, \ldots, \omega n\}$, что

1) $\omega 1 + \omega 1 + \ldots + \omega n = \cup$ (сумма всех событий – достоверное событие)
2) $\omega i \cdot \omega j = \emptyset, i \neq j$(различные события попарно несовместны
3) все элементарные события РАВНОВОЗМОЖНЫ.

Пример. Образуют ли полную группу событий множество событий при бросании кубика $\{\omega 2, \omega 3, \omega 4, \omega 5, \omega 6\}$:

1) $\omega 2 + \omega 3 + \omega 4 + \omega 5 + \omega 6 \neq \cup$ - не подходит
2) $\omega 2 \cdot \omega 3 = \emptyset, \ldots \omega 3 \cdot \omega 6 = \emptyset$ - подходит
3) все события равновозможны. – подходит.

Ответ: не образует

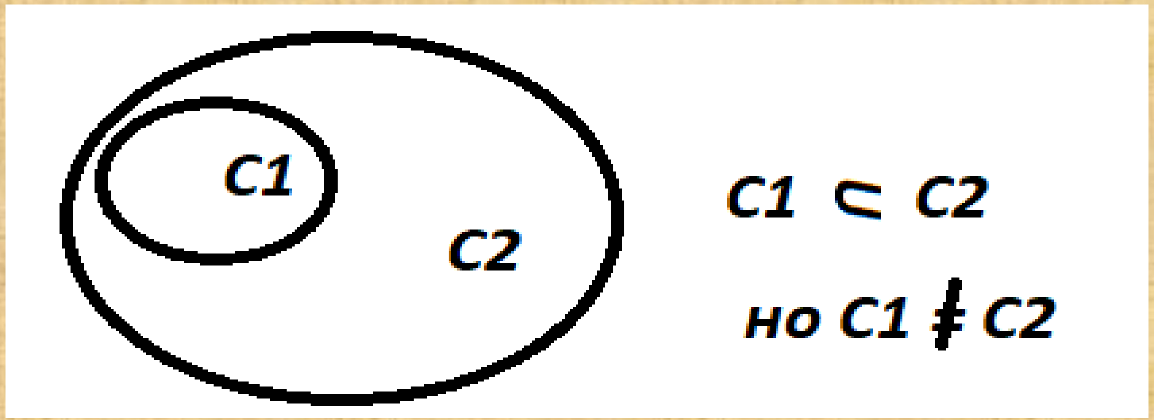
но: $\{\omega 1, \omega 2, \omega 3, \omega 4, \omega 5, \omega 6\}$ - полная группа событий

Определение. Два события равносильны ($c1=c2$), если при происхождении $c1$ происходит $c2$ и наоборот.

Определение. Событие $c1$ влечет за собой $c2$ ($c1 \subset c2$), если при появлении $c1$ будет наблюдаться и $c2$

Пример. $c1=\{\omega 2\}, c\_2=\{\omega 2, \omega 3, \omega 6\}$

$c1 \subset c2$



Классическое и геометрическое определение вероятности

Пусть рассматривается ПГС $=\{\omega 1,\omega 2,...,\omega n\}$ - полная группа случайных событий, в которой n - общее число, а mc - благоприятствующее число событий для появления события C.

Определение. (вероятности классическое) Вероятностью появления события C из ПГС назовем число, обозначаемое P(C)и вычисляемое по формуле

$$P(C)\stackrel{\text{def}}{=}mc/n$$

Пример. Монета: $=\{\omega 1,\omega 2\}$- ПГС ; n = 2; mc(c_орел)=1; P(c_орел)=1/2

Кубик: $=\{\omega 1,\omega 2,...,\omega 6\}$ - ПГС; n = 6

Пусть C=$\{\omega 2,\omega 4,\omega 6\}$; mc=3; P(C)=3/6=1/2

Пусть C=число очков на грани не меньше 2, тогда C=$\{\omega 2,\omega 3,\omega 4,\omega 5,\omega 6\}$, а P(C)=mc/n=5/6

Свойства вероятности

Свойства вероятности событий.

1) $P(\cup)=1;=\{\omega1,\omega2,...,\omega n\};mc=n;P(\cup)=n/n=1$
2) $P(\emptyset)=0;m=0;P(\emptyset)=o/n=0$
3) если $C1\subset C2\Rightarrow P(C1)\leq P(C2)$
4) если $C1=C2\Rightarrow P(C1)=P(C2)$
5) C и $\bar{C}$ - противоположные, если $C+\bar{C}=\cup$,а $C\cdot\bar{C}=\emptyset$;

Тогда $P(C)=1-P(\bar{C})$;

n - общее число; mc, $m\bar{c}$; $mc+m\bar{c}=n\Rightarrow mc=n-m\bar{c}$;

$$P(C)=(n-m\bar{c})/n=1-m\bar{c}/n=1-P(\bar{C})$$

6) т.к. $0\leq m\bar{c}\leq n;0\leq m/n\leq 1;0\leq P(C)\leq 1$;

Геометрическое определение вероятности

Определение. (вероятности геометрическое). Пусть ПГС – некоторое множество случайных событий на плоскости, тогда вероятность можно определить как отношение меры числа благоприятствующих событий к мере общего числа событий.

P(C)=mesC/meS=Sc/S　　　　　　　　　　　P(C)=l/L

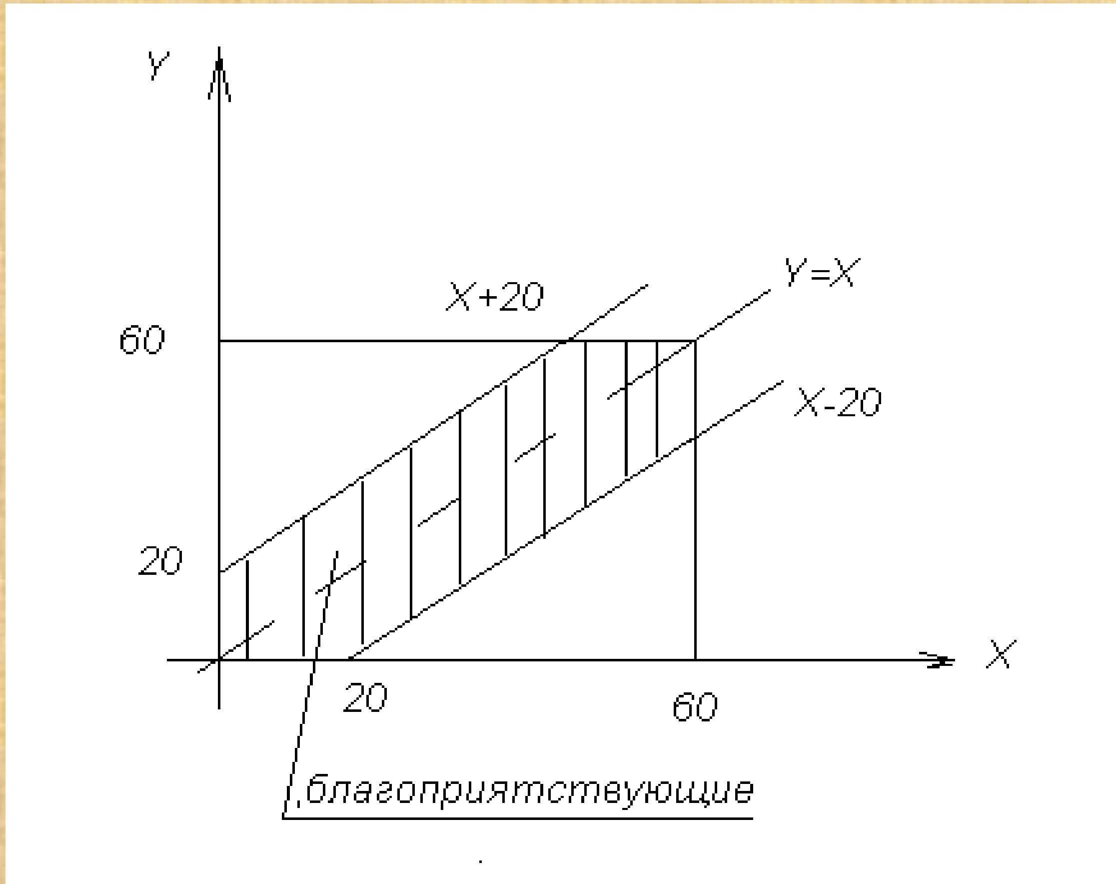
Пример. Задача о встрече.

Пусть двое договорились о встрече между 14 и 15 часами и ожидании друг друга не более 20 минут. Найти вероятность P их встречи.

Пусть X – время прихода 1-го

У – время прихода 2-го

Они встретятся, если $|X-Y|<20 \Leftrightarrow X-20<Y<X+20$



$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Условная вероятность. Теорема умножения.

Для изучения понятия условной вероятности вначале рассмотрим пример.

Пример. Имеются изделия трех сортов в количестве:

1 сорт - 5 штук

2 сорт - 3 штуки

3 сорт - 10 штук

Найти вероятность P того, что среди этих изделий, наудачу выбранное изделие будет 2 сорта?

$$P(A_2) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Пример. Среди изделий 1-го, 2-го, 3-го сорта предыдущей задачи наудачу выбранное изделие имеет сорт не выше 2-го (2 и 3 сорта).

Найти P того, что это изделие 2-го сорта.

Произошло событие В - (сорт изделия не выше 2-го); всего – 13 изделий

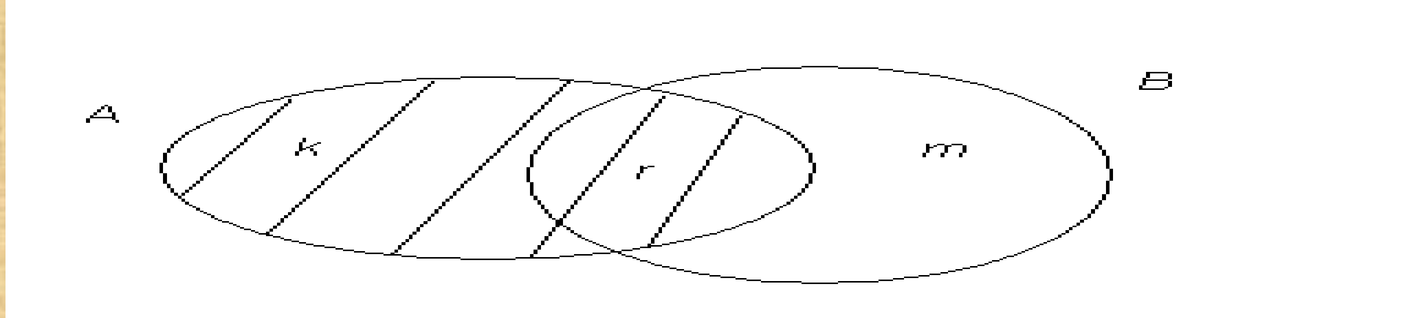
Событие A_2 - изделия 2-го сорта (их имеется 3 штуки); значит в соответствии с классическим определением вероятности имеем $\underset{B}{P}(A_2) = \frac{3}{13}$.

Теорема. (Об условной вероятности)

Если известно, что из ПГС событие А осуществляется при условии осуществления события В, то условная вероятность Р(А/В) вычисляется по формуле:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

ДоказательствоПусть рассматривается ПГС (n событий). В этой группе есть множества событий А и В. Пусть они пересекаются. Событию А благоприятствует k, событию В – m, пересечению событий – r.
Т.к. известно, что В – произошло, то произошло m событий, а также произошло событие А, которому благоприятствует r событий из множества В то в соответствии с рисунком



Имеем $P(A/B) = r/m; P(A/B) = \frac{r/n}{m/n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

Следствие: $P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$

Спасибо за внимание