Лабораторная работа № 6.

Численное решение задачи Коши.

Основные понятия.

Уравнения первого порядка имеют вид $y' = f(x, y)$, где f(x,y) – непрерывная функция в области D от x,y. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит области D на плоскости. Для выбора из множества решений ДУ одного единственного ставится задача Коши.

Задача Коши:

Найти такое решение y=y(x) этого уравнения, которое удовлетворяет условию $y(x_0)= y_0$, т.е. найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку M_0. Задача имеет единственное решение при выполнении условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

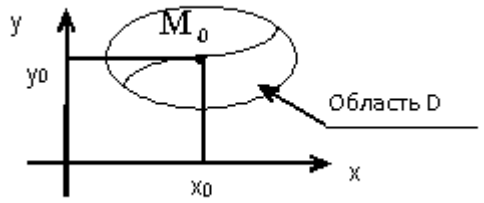
Теорема.

Если при решении задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ известно, что

1) f(x,y)- непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$;
2) $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ - ограничена в этой же окрестности т. $M_0(x_0,y_0)$,

тогда в окрестности $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ существует, причем единственная дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая удовлетворяет и уравнению и начальному условию.

Геометрический смысл теоремы- через каждую точку с координатами (x_0,y_0) в окрестности которой выполняются условия теоремы, проходит только одна интегральная кривая.



Постановка задачи Коши при численном решении дифференциальных уравнений.

Пусть дано $y' = f(x, y)$...(2) и $y(x_0) = y_0, M_0(x_0, y_0)$. Требуется найти приближённое решение поставленной задачи на отрезке [a,b], где $a=x_0$. Разбиваем отрезок *[a,b]* равноотстоящими точками $x_1 < x_2 < ... < x_n = b, x_{i+1} = x_i + h$, где h – шаг разбиения. Ищем приближённое значение решения задачи Коши в точках x_i. При этом, если y_i найдено, то следующие значение y_{i+1} получаем по формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $i = 0,1,...,(n-1)$. Приращение Δy_i в каждом методе находится по формулам, соответствующим выбранному методу.

Решение полученное в виде таблицы можно отобразить, использовав средства графики пакетов прикладных программ

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
…	…
x_n	y_n

Метод Эйлера.

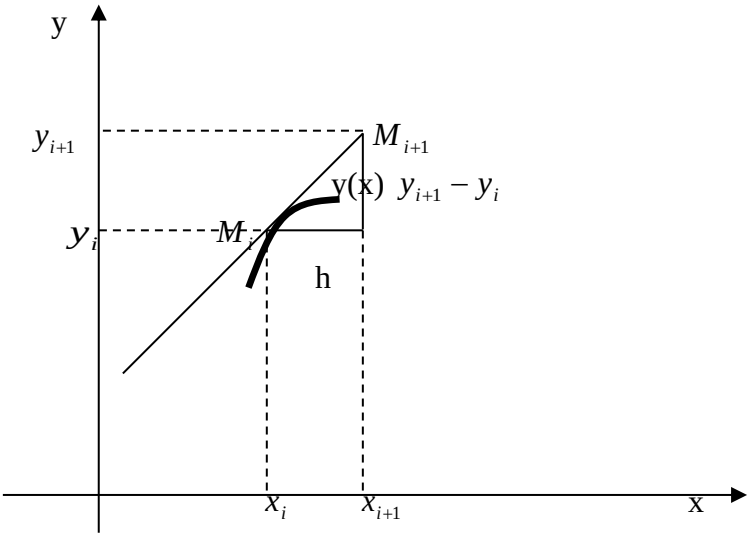
$y' = f(x, y) : M_0(x_0, y_0)$ $\qquad y(x_0) = y_0$

В методе Эйлера: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = h \cdot f(x_i; y_i) \quad i = 0,1,...,(n-1)$

Рассмотрим метод Эйлера:

Пусть $y(x\ )$ – точное решение задачи Коши. В точке $M_i(x_i, y_i)$ $y'(x_i) = f[x_i, y(x_i)]$.

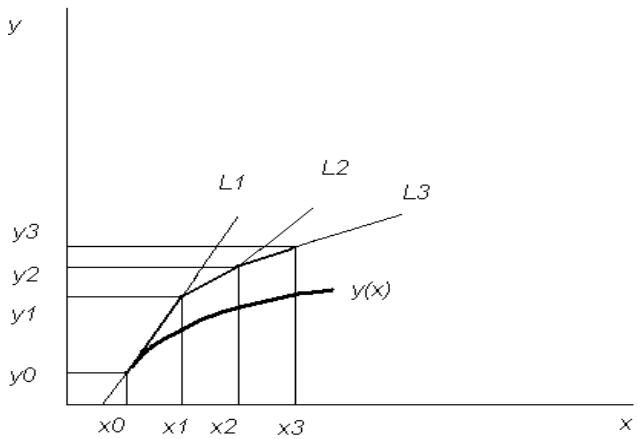
Известно, что $y'(x_i) = tg\alpha$ - угловой коэффициент касательной к интегральной кривой y(x) в точке $M_i(x_i, y_i)$.



$tg\alpha = f(x_i, y_i)$

С другой стороны: $tg\alpha = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$ Тогда: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i) \quad i = 0,1,...,(n-1)$

Таким образом, вместо искомой интегральной кривой $y(x\ )$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, рассмотрим отрезок $M_i M_{i+1}$ касательной к $y(x\ )$ в точке M_i.В случае небольшого шага h график функции и график касательной не успевают существенно разойтись друг от друга и можно в качестве значения решения в x_{i+1} принять значение касательной y_{i+1} вместо значения неизвестного точного решения. В результате многократного повторения этого действия на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $\quad i = 0,1,..., (n-1)$, получаем ломанную:



Метод Эйлера (ломаных) является простейшим методом и даёт грубое приближение. Более того, этот метод даёт систематическое отклонение искомого решения при переходе от одного шага к следующему.

ПРИМЕР 1.

Изучить работу метода Эйлера на отрезке [0,2] на примере задачи Коши вида

$$\frac{dy}{dx} = 2\,xy,\ y(0) = 1.$$

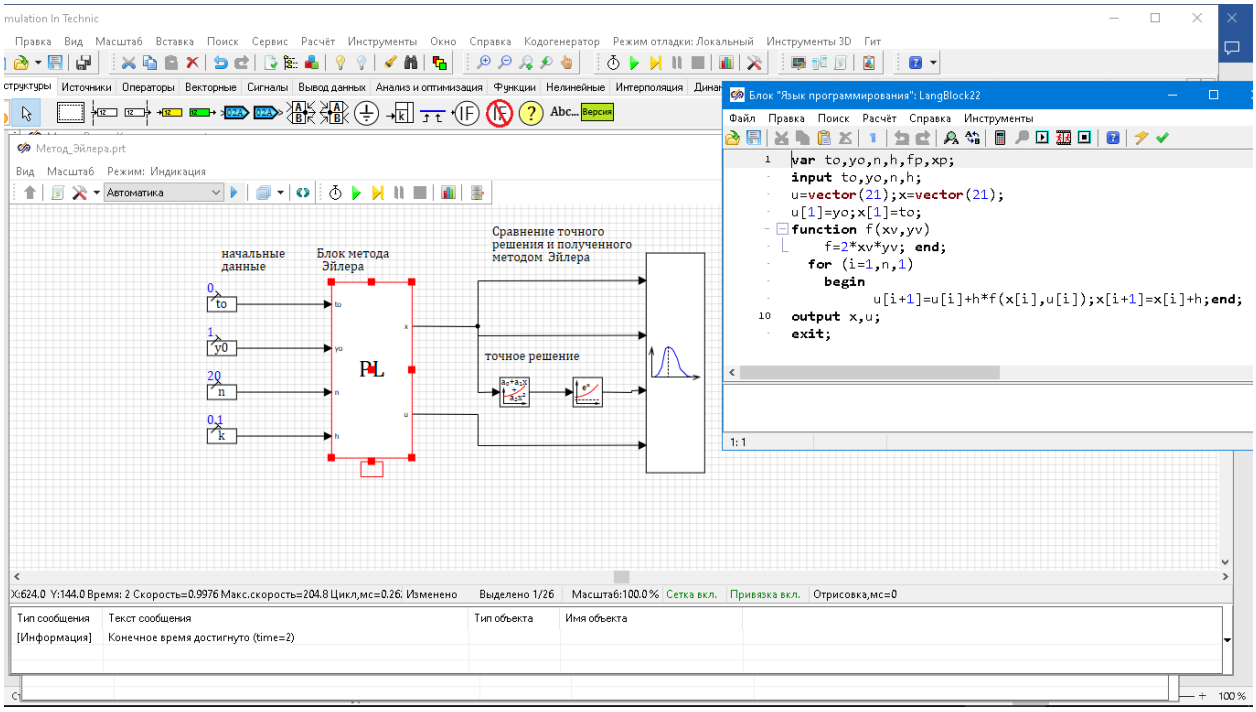
С этой целью найти точное решение задачи средствами Maple и приближенное решение с шагом 0.1, 0.02, 0.01.

Результаты сравнить графически. Сделать выводы.

Решение. Точное решение поставленной задачи Коши имеет вид

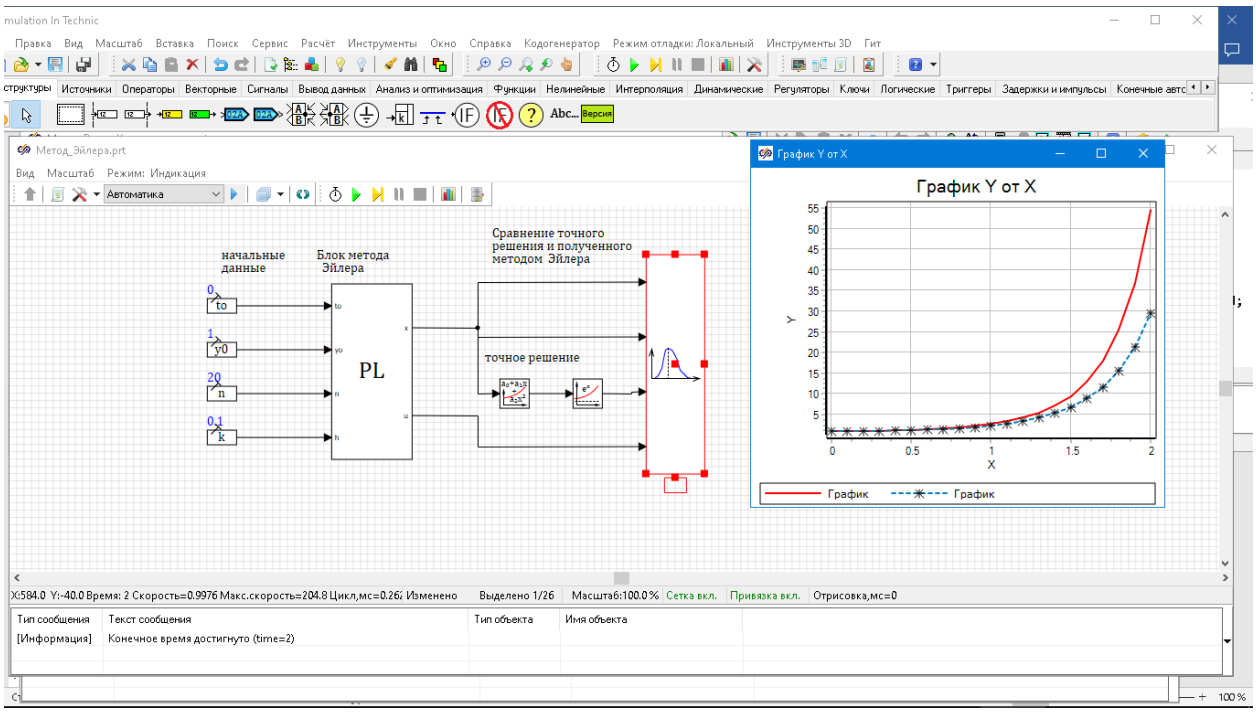
$$y = e^{x^2}$$

Структурная схема метода Эйлера в рабочем окне пакета Simintech представлена ниже:

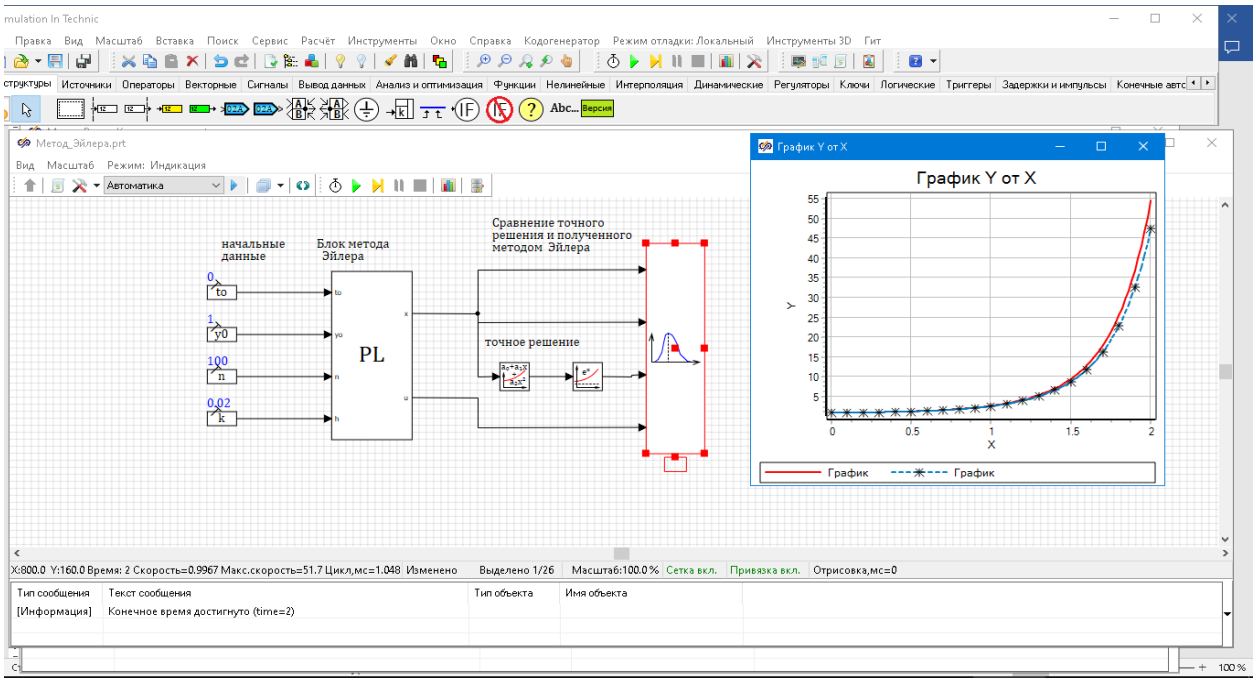


1. Задаются начальные данные – координаты точки M_0 , число шагов и шаг численного интегрирования. Введенные данные передаются на блок интегрирования метода Эйлера. В этом блоке задается правая часть дифференциального уравнения и циклически используется рекуррентная формула метода Эйлера. Данные запоминаются в массивы. Размерность массивов должна быть на единицу больше числа шагов.

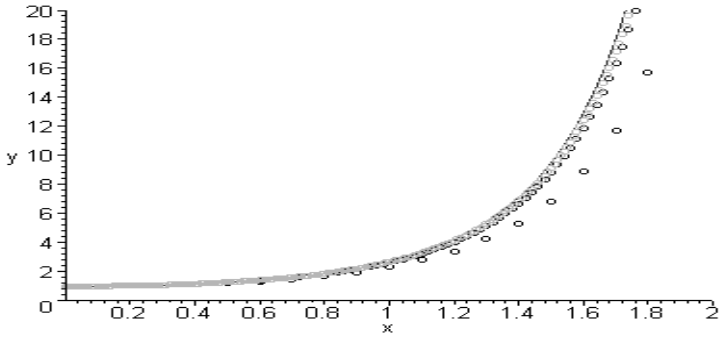
2. Полученные численные решения выводятся через порты вывода и используется при графическом сравнении точного и приближенного решений.



Видно, что метод Эйлера с при увеличении числа шагов дает все большую разницу точного и приближенного решения. Уменьшение шага в 5 раз улучшает картину приближенного решения, но на небольшом отрезке интегрирования. С ростом длины отрезка произойдет быстрое накопление погрешности и существенное отличие результатов.



Если найти приближенное решение с шагом 0.01 и построить все графики на одном рисунке то получим картинку



Выводы по методу Эйлера:
1. Решение с большим шагом может приводить к большим погрешностям;
2. Уменьшение шага на порядок приводит к уменьшению погрешности результатов.
3. Для достаточно малого шага отличие точного и приближенного решений незначительное.
4. С увеличением длины отрезка интегрирования происходит быстрое накопление погрешности, особенно для быстрорастущих функций.

Модифицированный метод Эйлера

Существует несколько модификаций метода Эйлера, которые дают более точные приближения искомого решения. Рассмотрим один из них.
Пусть дано $y' = f(x, y)$ и отрезок $[x_0, x_n]$, $M_0(x_0, y_0)$, h – шаг разбиения.
Вычисления проводят по схеме

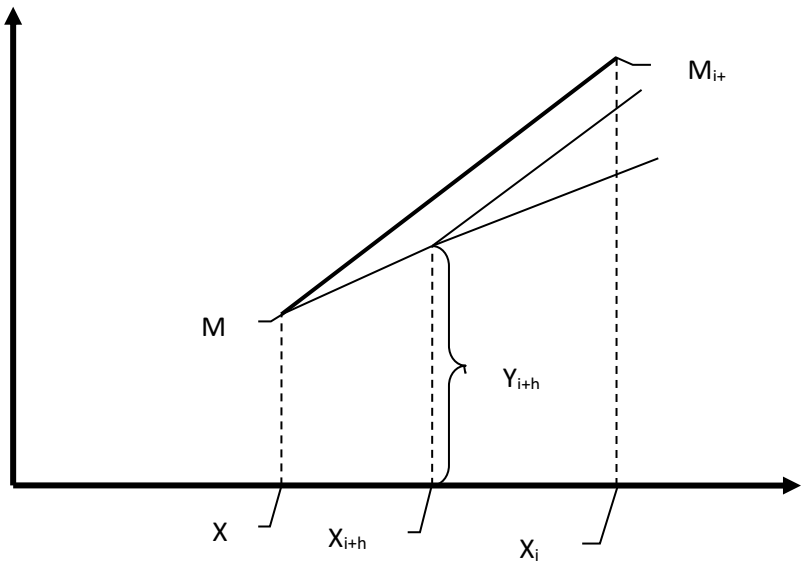
$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = h \cdot f(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}), где$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i)$$

Метод относится к методам типа «прогноз-коррекция». Сначала, при переходе в промежуточную точку, осуществляется прогноз расположения касательной к интегральной кривой. Затем осуществляется коррекция решения, при движении из начальной точки отрезка в конечную, с новым углом наклона линии движения, параллельной скорректированному тангенсу угла наклона касательной. Сначала с шагом $\frac{h}{2}$ находим $y_{i+h/2}$ т.е. точку ($x_{i+h/2}$, $y_{i+h/2}$) (как в методе Эйлера). Определяем в этой точке новое направление α_i. Затем проводим отрезок из точки M_i именно в этом новом направлении в точку M_{i+1}



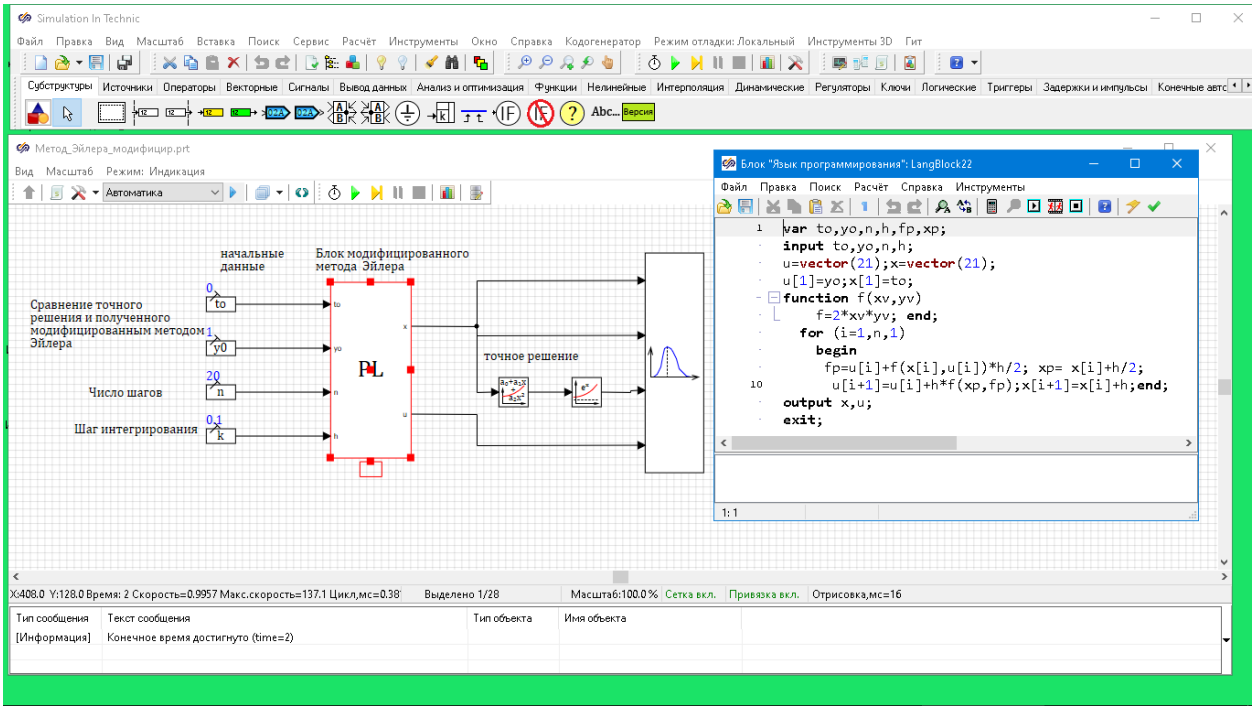
Погрешность метода на одном шаге имеет порядок $\sim h^3$.

ПРИМЕР 2.

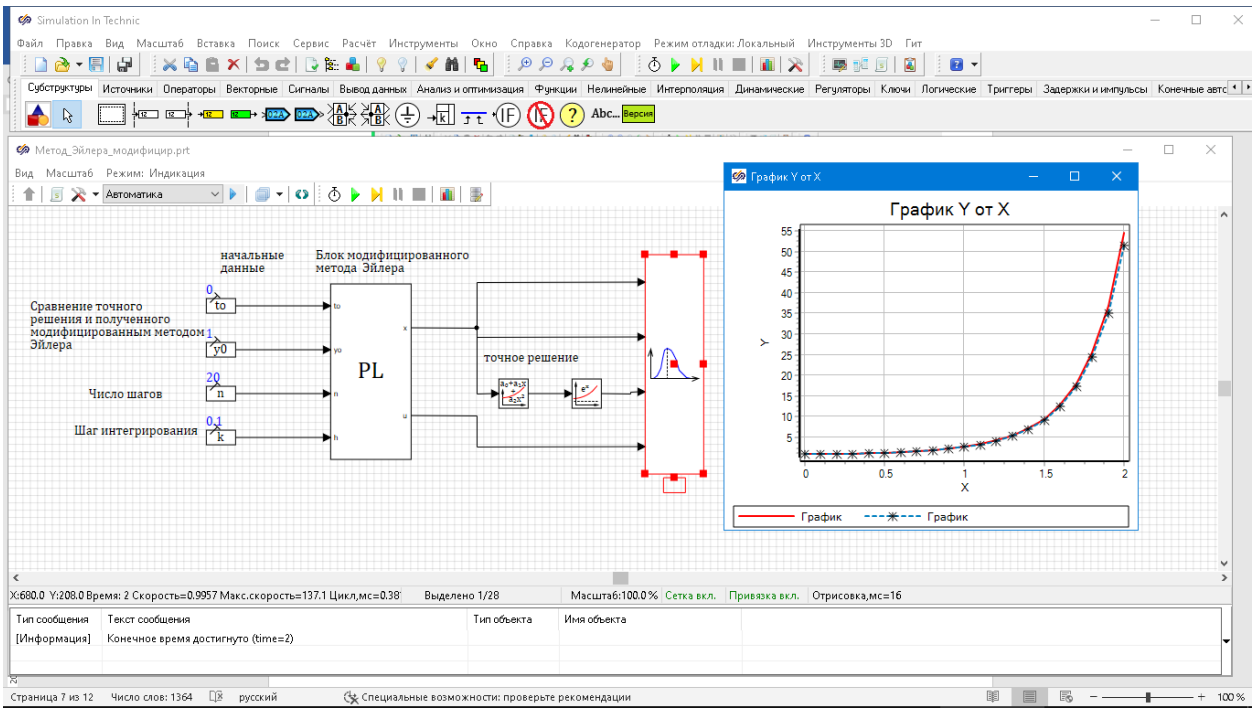
На примере предыдущего задания изучить работу модифицированного метода Эйлера, сравнивая точное решение задачи с приближенным, подсчитанным соответственно с шагом h=0.2, 0.1, 0.05.

Решение.

Решается таже задача Коши, что и в примере 1. Структурная схема, в целом, имеет тот же вид, что и для метода Эйлера. Отличие состоит в блоке программирования модифицированного метода Эйлера:



В этом блоке для получения решения циклически используется формула двухшагового модифицированного метода Эйлера. Этот метод относится к методам типа «прогноз-коррекция». Так как погрешность метода на каждом шаге имеет порядок $\sim h^3$, то при том же шаге, что и для метода Эйлера, решение получается намного точнее, чем в методе Эйлера:



Однако и этой точности во многих случаях бывает недостаточно. Поэтому разработали более точные методы, обладающие меньшей погрешностью. К одним из этих методов относится метод Рунге-Кутта.

Метод Рунге-Кутта.

Метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности является одним из самых широко используемых методов решения задачи Коши.

Пусть дано $y' = f(x, y)$ и отрезок $[x_0, x_n]$, $M_0(x_0, y_0)$, h – шаг разбиения.

Вычисления в этом методе проводятся по четырехшаговой схеме:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4)$$

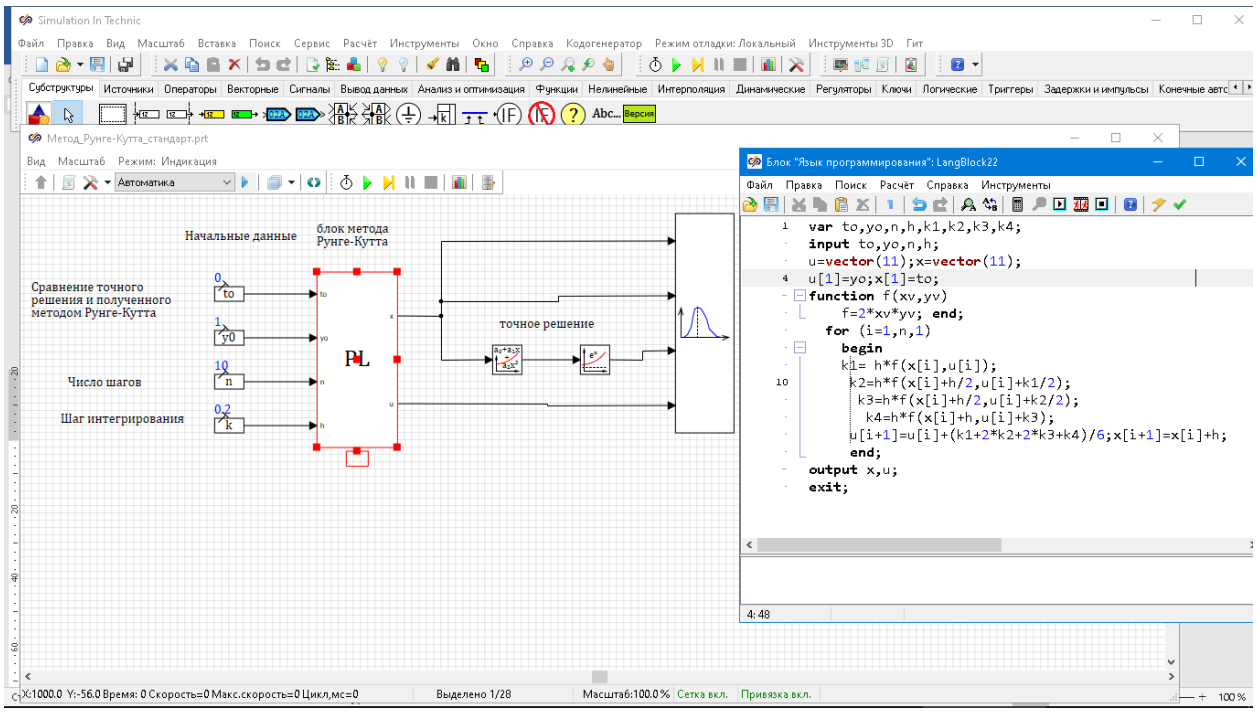
$$K_1 = h \cdot f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_1}{2})$$

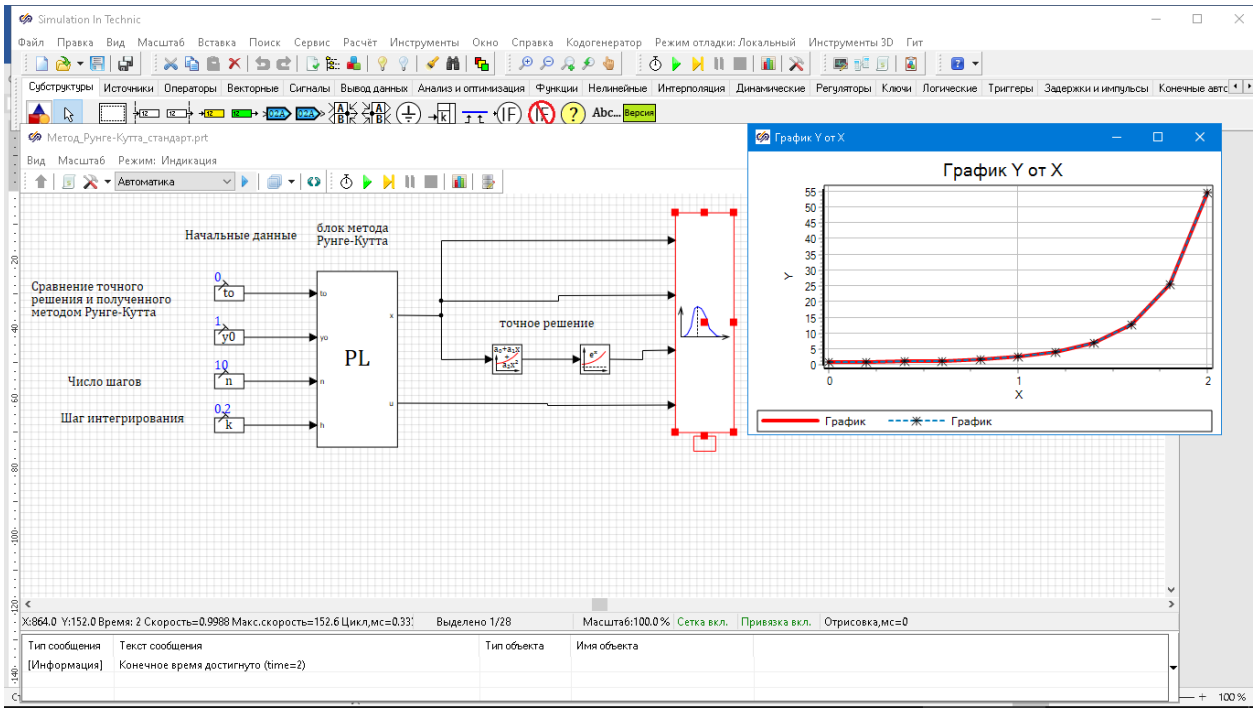
$$K_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = h \cdot f(x_i + h; y_i + K_3)$$

Погрешность метода на одном шаге имеет порядок $\sim h^5$.
Структурная схема метода представлена ниже:



Отличие этой схемы для решения задачи Коши, рассмотренной ранее, состоит в том, что в блоке интегрирования циклически повторяются формулы четырехшагового метода Рунге-Кутта. Решение, полученное по схеме метода Рунге-Кутта, практически не отличается от точного решения, даже при выборе шага интегрирования во много раз больше, чем в ранее рассмотренных методах.



Как видно из графического материала, точное и приближенное решения практически совпадают.

Для практической оценки **погрешности решения на каждом шаге** при переходе от точки x_i к точке x_{i+1} применяют правило Рунге двойного пересчета. Суть этого правила состоит в том, что выбирают значение шага h и дважды рассчитывают решение в

точке x_{i+1} : один раз с шагом h, другой раз – с шагом $h/2$. Рассчитывается величина погрешности по формуле

$$R^h = \frac{\left|y_{i+1}^h - y_{i+1}^{h/2}\right|}{15}$$

и сравнивается с заданной погрешностью ε . Если $R^h < \varepsilon$, то можно продолжить вычисления с тем же шагом, в противном случае необходимо вернуться к решению в точке x_i, уменьшив шаг и повторив вычисления.

Правило Рунге получено из следующих простых соображений.

Пусть на 1 шаге погрешность составляет h^k. Тогда за N шагов погрешность составит величину, задаваемую неравенством:

$$\left|y_N - \tilde{y}_N\right| \le CNh^k \qquad (1)$$

Если шаг взять шаг $h/2$, то сделав 2N шагов, имеем:

$$\left|y_N - \tilde{y}_{2N}\right| \le C2N\left(\frac{h}{2}\right)^N \qquad (2)$$

Применим неравенство:

$$\left|\tilde{y}_N - \tilde{y}_{2N}\right| = \left|\tilde{y}_N - y_N + y_N - \tilde{y}_{2N}\right| \ge \left\|\tilde{y}_N - y_N\right| - \left|y_N - \tilde{y}_{2N}\right\| = \left|CNh^k - C2N\left(\frac{h}{2}\right)^k\right|$$

Откуда

$$C \le \frac{\left|\tilde{y}_N - \tilde{y}_{2N}\right|}{\left|Nh^k - 2N\left(\frac{h}{2}\right)^k\right|}.$$

После подстановки в (2) имеем:

$$\left| y_N - \tilde{y}_{2N} \right| \le \frac{\left| \tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_N \right|}{2^{k-1} - 1}$$

Тогда для метода Эйлера (при k = 2) предельная абсолютная погрешность находится по формуле:

$$\left| y_N - \tilde{y}_{2N} \right| = \left| \tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_N \right|$$

Для модифицированного метода Эйлера (при k = 3) практическая оценка погрешности за 2N шагов:

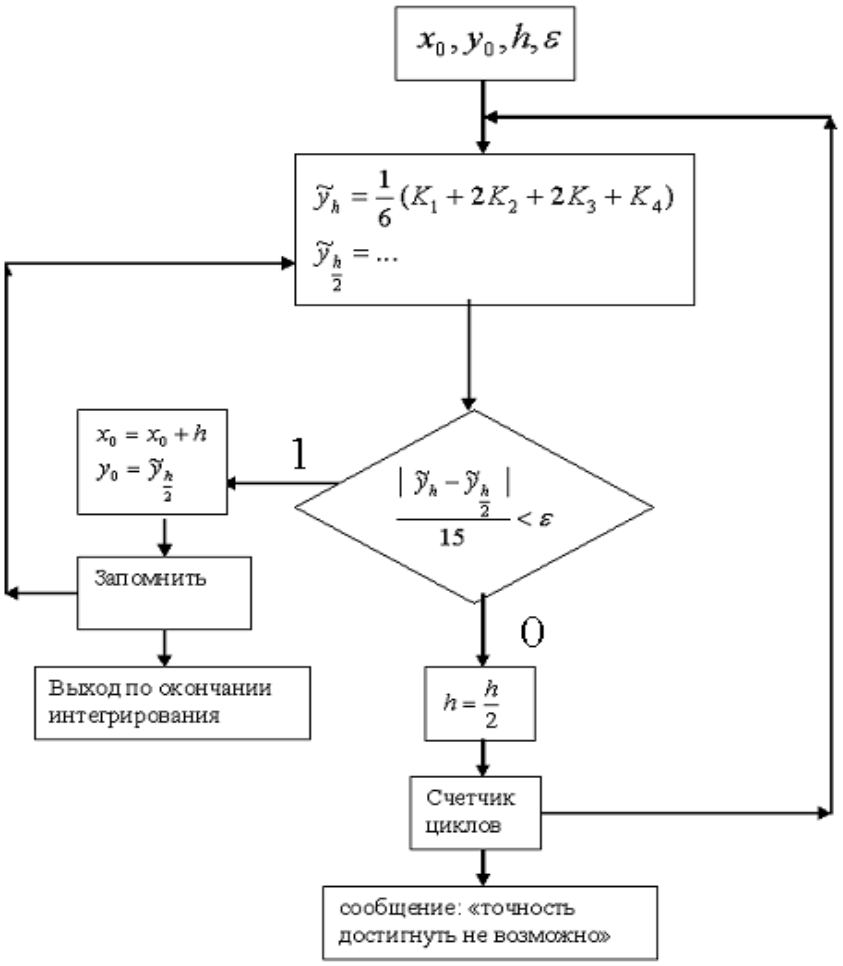
$$\left| y_N - \tilde{y}_{2N} \right| = \frac{\left| \tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_N \right|}{3}$$

Для метода Рунге – Кутта (при k = 5):

$$\left| \; y_N - \tilde{y}_{2N} \; \right| = \frac{\left| \; \tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_N \; \right|}{15}$$

<u>Алгоритм формулы двойного пересчета:</u>

1. Задаем начальные данные x_0, y_0, h, ε
2. Делаем шаг по формулам метода Рунге – Кутта с двойным пересчетом
3. Сравниваем выражения
4. При выполнении условия по погрешности переходим к следующему шагу.
5. При невыполнении условия по погрешности, действуем в соответствии с блок-схемой.



КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1.

Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера на отрезке[0,2;1,2] с шагом 0,1 при начальном условии y(0,2)=0,25. Построить графики решений. Сравнить результаты. Сделать выводы.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2.

Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности на отрезке[0,2;1,2] при начальном условии y(0,2)=0,25 с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$, модифицировав программу с учетом правила Рунге двойного пересчета.

ВАРИАНТ №1 $y' = 0{,}133(x^2 + \sin 2x) + 0{,}872y$

ВАРИАНТ №2 $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 1{,}5x) + 1{,}283y$

ВАРИАНТ №3 $y' = 0{,}158(x^2 + \sin 0{,}8x) + 1{,}164y$

ВАРИАНТ №4 $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}7x) + 0{,}754y$

ВАРИАНТ №5 $y' = 0{,}221(x^2 + \sin 1{,}2x) + 0{,}452y$

ВАРИАНТ №6 $y' = 0{,}163(x^2 + \cos 0{,}4x) + 0{,}635y$

ВАРИАНТ №7 $y' = 0{,}218(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}718y$

ВАРИАНТ №8 $y' = 0{,}145(x^2 + \cos 0{,}5x) + 0{,}842y$

ВАРИАНТ №9 $y' = 0{,}213(x^2 + \sin 1{,}8x) + 0{,}368y$

ВАРИАНТ №10 $y' = 0{,}127(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}573y$

ВАРИАНТ №11 $y' = 0{,}232(x^2 + \sin 1{,}4x) + 1{,}453y$

ВАРИАНТ №12 $y' = 0{,}417(x^2 + \cos 0{,}8x) + 0{,}972y$

ВАРИАНТ №13 $y' = 0{,}324(x^2 + \sin 1{,}5x) + 1{,}612y$

ВАРИАНТ №14 $y' = 0{,}263(x^2 + \cos 1{,}2x) + 0{,}453y$

ВАРИАНТ №15 $y' = 0{,}372(x^2 + \sin 0{,}2x) + 0{,}758y$

ВАРИАНТ №16 $y' = 0{,}343(x^2 + \cos 0{,}4x) + 1{,}315y$

ВАРИАНТ №17 $y' = 0{,}276(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}988y$

ВАРИАНТ №18 $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}6x) + 1{,}534y$

ВАРИАНТ №19 $y' = 0{,}258(x^2 + \sin 0{,}4x) + 0{,}724y$

ВАРИАНТ №20 $y' = 0{,}317(x^2 + \cos 1{,}4x) + 1{,}344y$

ВАРИАНТ №21 $y' = 0{,}166(x^2 + \sin 1{,}1x) + 0{,}883y$

ВАРИАНТ №22 $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 0{,}9x) + 1{,}213y$

ВАРИАНТ №23 $y' = 0{,}188(x^2 + \sin 1{,}5x) + 0{,}885y$

ВАРИАНТ №24 $y' = 0{,}314(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}772y$

ВАРИАНТ №25 $y' = 0{,}418(x^2 + \sin 1{,}2x) + 1{,}344y$

При решении дифференциальных уравнений и систем рассмотренные выше методы положены в основу стандартных блоков. На основе этих стандартных блоков можно решать многие дифференциальные уравнения и системы. Для этой цели их лучше всего привести к нормальной форме записи. Приведение к нормальной форме записи можно осуществить в соответствии с заменой переменных:

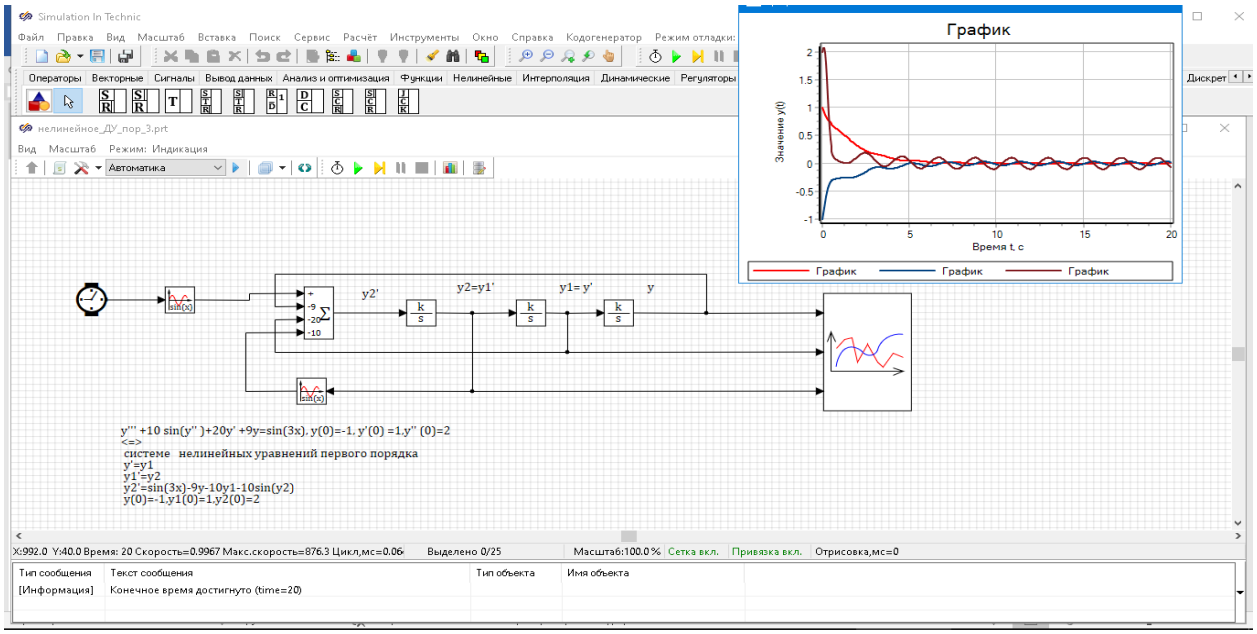
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Введём новые функции

$$\begin{cases} y_1 = y' \\ y_2 = y'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = y^{(n-1)} \end{cases} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}.$$

Каждое дифференциальное уравнение первого порядка легко интегрируется стандартным блоком $\frac{k}{s}$ из раздела «динамические». При этом учитываются и начальные условия и метод интегрирования. Решение может быть получено при произвольных правых частях, лишь бы выполнялись условия теоремы существования и единственности.

Ниже приведена структурная схема решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка:



Графики решения, первой и второй производных решения показывают выполнение начальных условий, наличие переходного режима и выход в «квазастационарный» режим решения уравнения.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 3.

Для нелинейного RLC контура, с математической моделью записанной относительно заряда и параметрами

$$\frac{R}{L} = Nsin^2(N * q), \frac{1}{L \cdot C} = N, f(t) = \cos\left(\frac{t}{N}\right), q(0) = -1, q'(0) = 2\ ,$$

Составить структурную схему и получить решение на отрезке $[0, 10]$.

N – номер варианта.