Лабораторная работа № 5 Решение нелинейных уравнений.

Численное решение нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$ заключается в нахождении значений x, удовлетворяющих с заданной точностью ε данному уравнению, и состоит из следующих основных этапов:

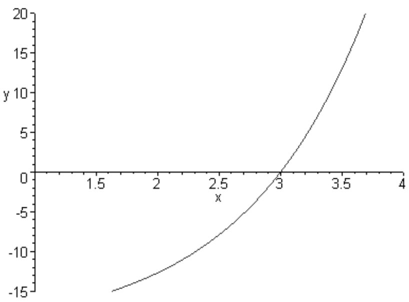
- Отделение (изоляция) корней уравнения.
- Уточнение с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.

Целью первого этапа является нахождение области отделения корня (О.О.К.), то есть отрезка $[a, b]$ из области определения функции $f(x)$, внутри которого содержится только один корень решаемого уравнения.

Определение. Отрезок $[a, b]$ из области определения функции непрерывной $f(x)$ будем называть областью отделения корня (О.О.К.) уравнений $f(x) = 0$, если

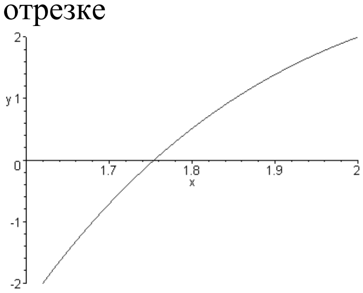
1) $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2) $f'(x)$ – сохраняет знак на этом отрезке,
3) $f''(x)$ – сохраняет знак на этом отрезке.

Из определения О.О.К. следует, что на отрезке $[a, b]$ поведение функции может быть описано одним из четырех вариантов. Разберем эти варианты.



В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[2{,}5;3{,}5]$. Действительно, из графика видно, что

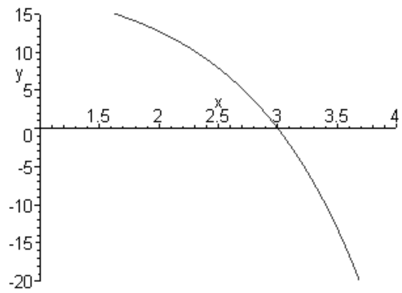
1) $f(2{,}5) \cdot f(3{,}5) < 0$,
2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке



В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[1{,}7;1{,}8]$. Действительно, из графика видно, что

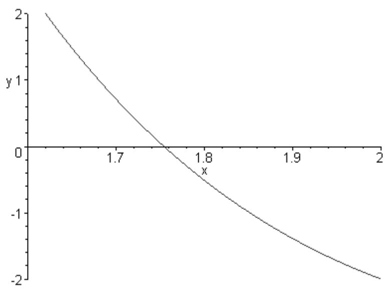
1) $f(1{,}7) \cdot f(1{,}8) < 0$,
2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке

Других вариантов нет.



В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[2{,}5;3{,}5]$. Действительно, из графика видно, что

1) $f(2{,}5) \cdot f(3{,}5) < 0$,
2) $f'(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке



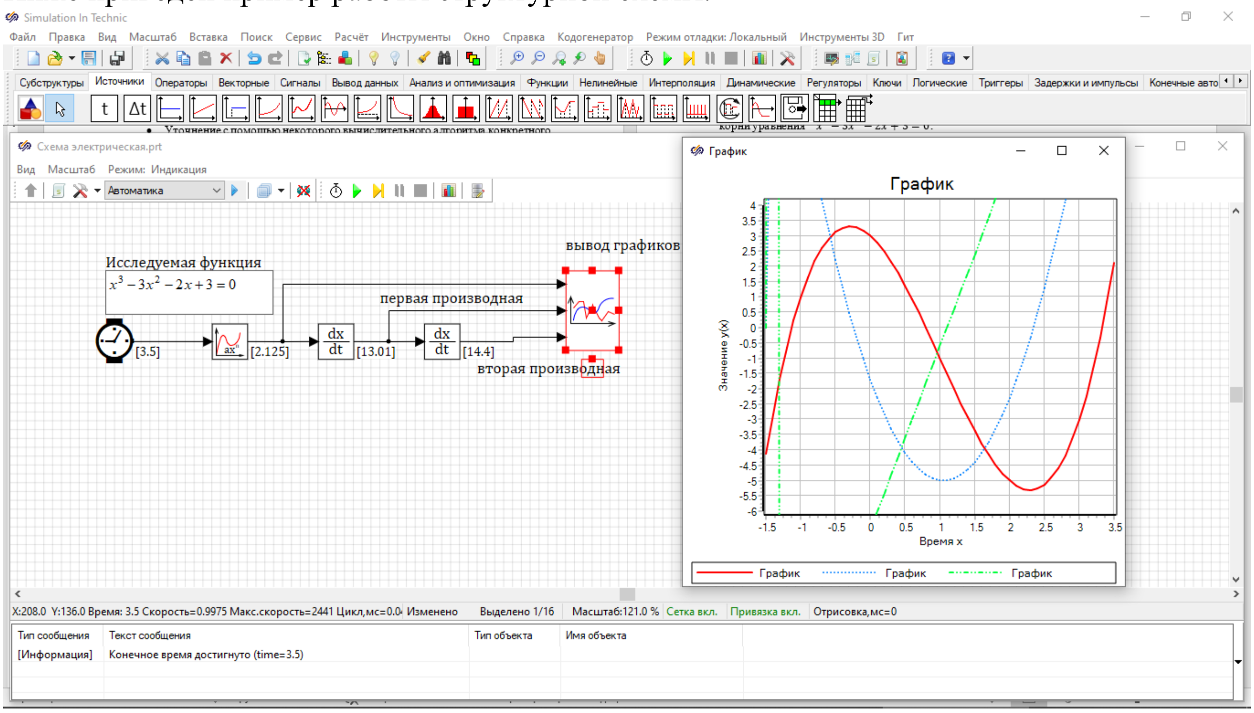
В качестве О.О.К., в этом примере можно выбрать отрезок $[1{,}7;1{,}8]$. Действительно, из графика видно, что

1) $f(1{,}7) \cdot f(1{,}8) < 0$,
2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке.

Для нахождения О.О.К. на практике используют графический или аналитический способы.
Задание 1. Используя графические возможности пакета Maple, найти отрезки отделяющие корни уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$.
Рассмотрим левую часть уравнения и построим графики функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$, ее первой и второй производных.
Учитывая определение О.О.К. и анализируя поведение графиков функции и ее первой и второй производных, найдем искомые отрезки. Для этой цели создадим в рабочем окне блок построения графиков в соответствии с алгоритмом:

- Задать аргумент функции: раздел «источники» «иконка» - часики;
- Задать степенную функцию: раздел «функции» «иконка» - степенные;
- Вычислить первую производную (численно) : раздел «динамические» иконка $\frac{dx}{dt}$;
- Вычислить вторую производную (численно) : раздел «динамические» иконка $\frac{dx}{dt}$;
- Создать блок вывода графиков на печать: раздел «вывод данных» иконка «графики»;
- Соединить линиями порты вывода и ввода блоков структурной схемы;
- Инициализировать структурную схему и осуществить ее пуск, не забыв задать в «инструментах» размеры окна вывода, которые можно в дальнейшем корректировать по щелчку мыши в свойствах графиков функций.

Ниже приведен пример работы структурной схемы.



Отрезками, отделяющими корни, являются:

$[-1{,}2; -1{,}0]$, так как
1) $f(-1{,}2) \cdot f(-1{,}0) < 0$
2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке

$[0{,}6; 0{,}9]$, так как
1) $f(0{,}6) \cdot f(0{,}9) < 0$,
2) $f'(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) < 0$ сохраняет знак на этом отрезке

$[3{,}2; 3{,}4]$, так как
1) $f(3{,}2) \cdot f(3{,}4) < 0$,
2) $f'(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке
3) $f''(x) > 0$ сохраняет знак на этом отрезке

Таким образом, при завершении первого этапа должны определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения $f(x)=0$. Для уточнения корней с заданной точностью ε будем использовать итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности $\{x_n\}, n=0,1,2,...$, сходящейся к искомому корню уравнения.

1. Комбинированный метод уточнения корней уравнения.

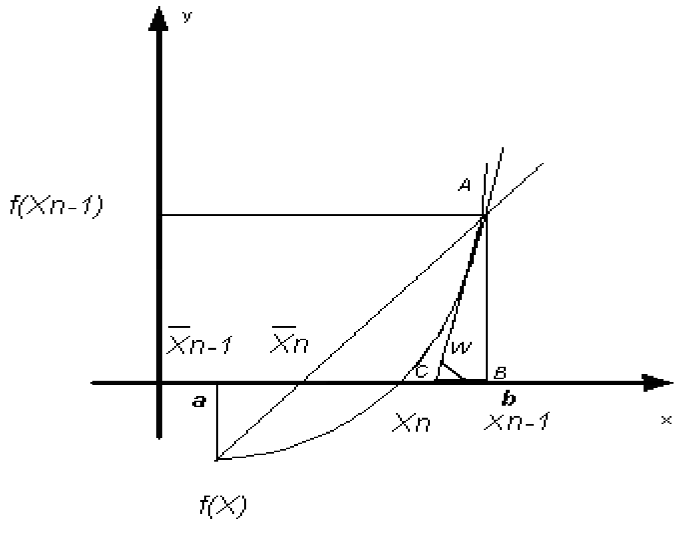
Теорема

Если $[a,b]$ О.О.К. уравнения $f(x)=0$ и в качестве начального приближения x_0 выбран тот из концов отрезка, для которого выполняется условия $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, то последовательность $\{x_n\}, n=1,2,...$, члены которой находятся по формуле $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, сходится к корню этого уравнения, также как и последовательность

$$\{\bar{x}_n\}, n = 1,2,\dots$$

, $\bar{x}_n = b - f(b) * \dfrac{b-\bar{x}_{n-1}}{f(b)-f(\bar{x}_{n-1})}$, где $f(b)\cdot f''(b)>0$, $\bar{x}_0$ - конец отрезка противоположный b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \Theta$, где $f(\Theta)=0$, $(\Theta\in[a,b])$.

В качестве условия окончания итераций используют формулу $|x_n - \bar{x}_n| \le \varepsilon$. Геометрически, комбинированный метод (хорд и Ньютона) эквивалентен с одной стороны построению системы хорд, а с другой стороны системы касательных к дуге кривой $y = f(x)$ отрезка отделяющего корень.



Из прямоугольного треугольника ABC $\quad tgW = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}-x_n}$

С другой стороны *(AC)* - касательная у графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_{n-1}; f(x_{n-1}))$, тогда, из геометрического смысла производной в точке, $tgW = f'(x_{n-1})$. Таким образом $f'(x_{n-1}) = \dfrac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}-x_n}$, отсюда выразим x_n:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Аналогичным образом, используя свойства подобия треугольников можно получить формулу метода хорд (см. лекции и практические занятия).

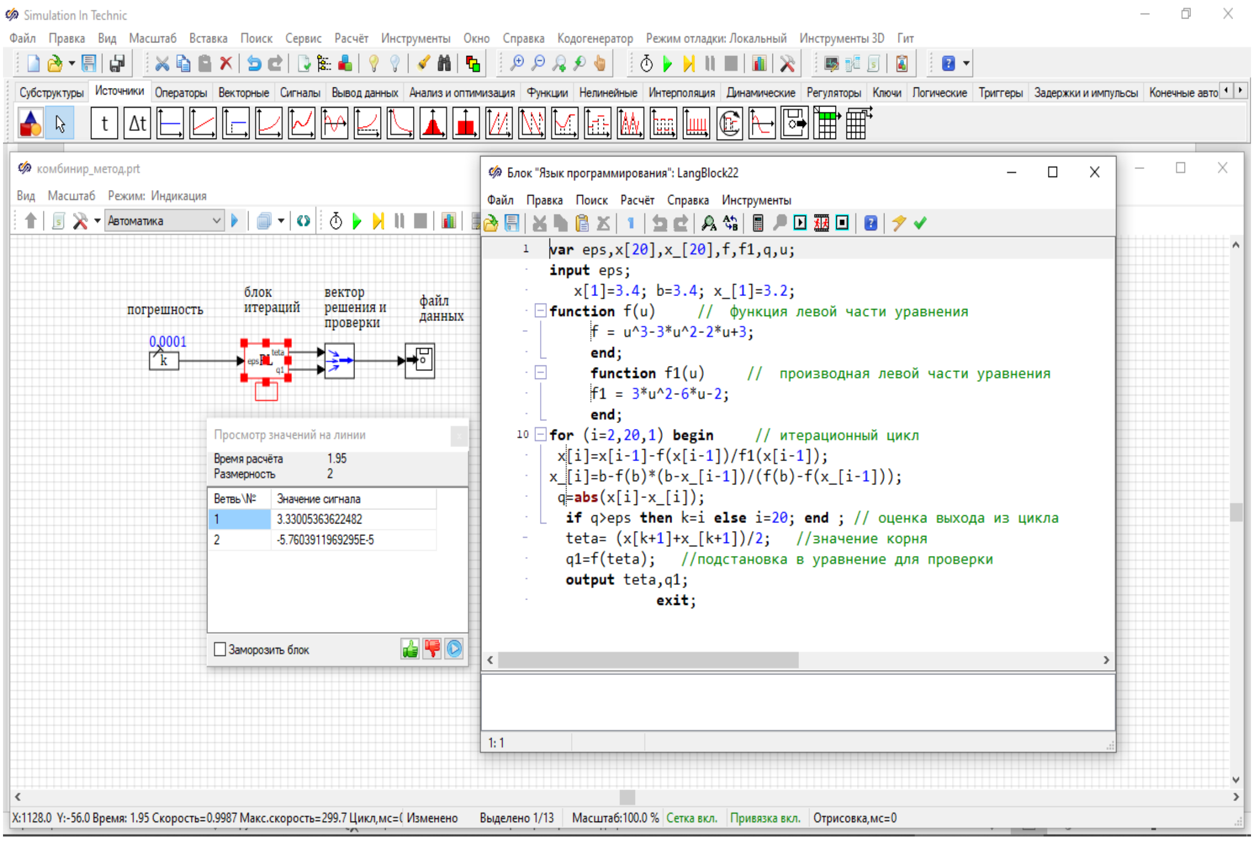
Задание 2. Уточнить наибольший корень заданного уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ комбинированным методом, с погрешностью 0.0001. Остановку процесса уточнения корня произвести в соответствии с условием $|x_n - \bar{x}_n| \leq \varepsilon$.Приступим к итерационному процессу в соответствии с комбинированным методом, используя формулы

$$\bar{x}_n = b - f(b) * \frac{b - \bar{x}_{n-1}}{f(b) - f(\bar{x}_{n-1})} \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Задаем начальное приближение метода Ньютона, неподвижную точку метода хорд, начальное приближение метода хорд и погрешность нахождения корня

```
x[1]:=3.4; b:=3.4; x_[1]:=3.2;e:=0.0001;
```

В цикле осуществляем итерационный процесс комбинированного метода с оценкой погрешности нахождения корня. Остановка итерационного процесса осуществляется при выполнении неравенства q < e. Структурная схема решения представлена ниже:



Таким образом, корень найден $teta$=3,3301 с точностью 10^{-4}, хотя , как видно из подстановки в левую часть уравнения, погрешность еще меньше, порядка $5.8 \cdot 10^{-5}$.

2 Метод простой итерации

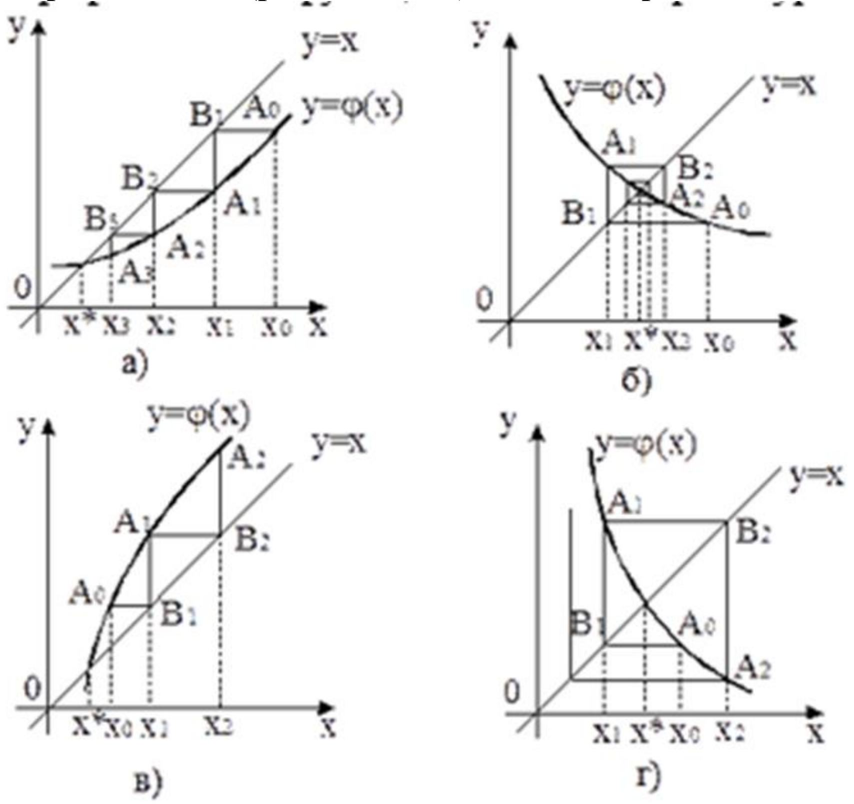
Теорема.

Если $[a,b]$– О.О.К. уравнения $f(x)=0$ и:

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=h(x)$;
2. $\exists h'(x) для \forall x \in [a,b]$
3. $|h'(x)|< q <1$ для $\forall$ $x \in [a,b]$,

тогда последовательность $\{x_n\}, n=0,1,2,...$, члены которой находятся по формуле: $x_n = h(x_{n-1})$ сходиться к точному значению корня уравнения $f(x)=0$, при любом начальном приближении x_0 из отрезка [a,b] т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$, где $f(\Theta)=0$, $(\Theta \in [a,b])$.

Характер сходимости (расходимости) метода итераций:



Оценка сходимости метода простой итерации дается следующей формулой: $|\Theta - x_n| \le \dfrac{q}{q-1}|x_n - x_{n-1}|$, где $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |h'(x)| < 1$, $0 < h'(x) < 1$

Отсюда следует, что процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства $|x_n - x_{n-1}| \le \dfrac{1-q}{q}\varepsilon$, где ε - заданная погрешность корня.

Построение уравнения удобного для создания итерационного процесса.

Пусть имеется уравнение $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{M}=0, (M-const) \Leftrightarrow -\dfrac{f(x)}{M}=0 \Leftrightarrow x = x - \dfrac{f(x)}{M}$. В качестве *M* выбирают $M = \begin{bmatrix} \max|f'(x)|, f'>0 \\ -\max|f'(x)|, f'<0 \end{bmatrix}$.

Итерационное уравнение будет иметь вид: $x = h(x)$, где $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$.

Найдем $h'(x)$: $h'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)}{M}$.

Тогда $|h'(x)| = |1 - \dfrac{f'(x)}{M}| \le 1 - \dfrac{m}{M} = q < 1$, если $m = \begin{bmatrix} \min|f'(x)|, f' > 0 \\ -\min|f'(x)|, f' < 0 \end{bmatrix}$

Следовательно, в качестве q можно выбрать $q = 1 - \dfrac{m}{M}$

Задание 4. Уточнить оставшиеся корни уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ методом простой итерации, предварительно приведя его к виду удобному для итераций. Погрешность 0.0001.

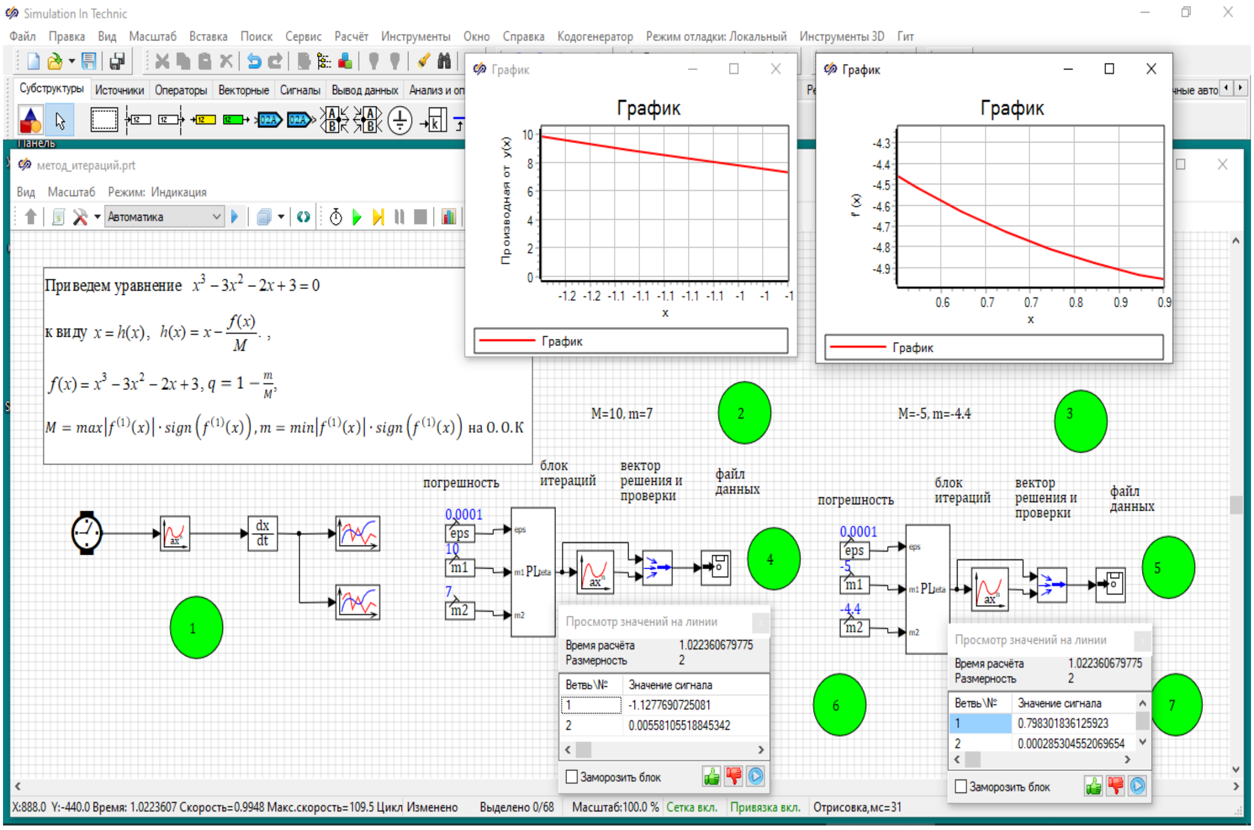
Решение.

Приведем уравнение $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ к виду $x = h(x)$, $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$. , а

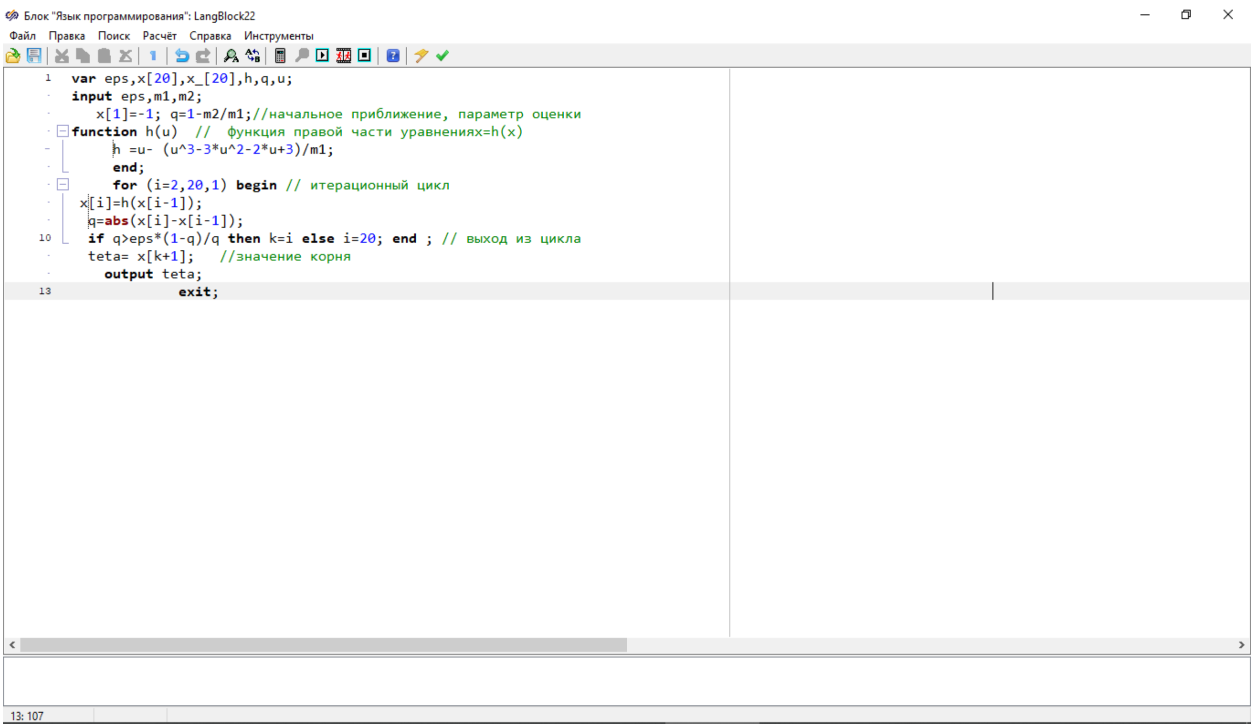
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ на двух отрезках отделяющих корни:

1). $[-1.2; -1.0]$; **2)**. $[0.6; 0.9]$;

Найдем M, m, q, для этого построим графики $f'(x)$ и $|f'(x)|$ на этом отрезке создав в пакете Simintech блок (1) и выведя на экран монитора графики (2), (3), как показано ниже:



Затем, найдя по графикам наибольшие и наименьшие значения в соответствии с графиками (2) и (3), введем их в созданных итерационных блоках (4) и (5). Решения и погрешность решения выведены на графиках (6) и (7). Программа итерационного блока на языке программирования Simintech набрана и отлажена в блоке программирования и имеет вид:




```
var eps,x[20],x_[20],h,q,u;
input eps,m1,m2;
   x[1]=-1; q=1-m2/m1;//начальное приближение, параметр оценки
function h(u)  //  функция правой части уравненияx=h(x)
     h =u- (u^3-3*u^2-2*u+3)/m1;
     end;
     for (i=2,20,1) begin // итерационный цикл
 x[i]=h(x[i-1]);
  q=abs(x[i]-x[i-1]);
  if q>eps*(1-q)/q then k=i else i=20; end ; // выход из цикла
  teta= x[k+1];   //значение корня
    output teta;
             exit;
```

Таким образом найдены корни: $x_2 = -1.1278, x_3 = 0.7983$.

Контрольное задание.

1. Найти отрезки отделяющие корни данного уравнения (О.О.К.) (Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей фамилии по журналу).
2. Уточнить наибольший корень заданного уравнения комбинированным методом, с погрешностью 0.00001.
3. Уточнить оставшиеся корни уравнения, методом простой итерации, предварительно приведя его к виду удобному для итераций. Погрешность 0.00001.

в.1	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	**в.2**	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$
в.3	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	**в.4**	$x^3 - 12x + 6 = 0$
в.5	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	**в.6**	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$
в.7	$2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$	**в.8**	$x^3 - 3x^2 + 3,5 = 0.$
в.9	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$	**в.10**	$x^3 + 3x^2 - 3,5 = 0.$
в.11	$x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0.$	**в.12**	$x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0.$
в.13	$2x^3 + 9x^2 - 10 = 0.$	**в.14**	$x^3 - 12x^2 + 10 = 0.$
в.15	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$	**в.16**	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0.$
в.17	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0.$	**в.18**	$x^3 - 4x^2 + 2 = 0.$
в.19	$x^3 - 12x - 5 = 0.$	**в.20**	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0.$
в.21	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0.$	**в.22**	$2x^3 + 9x^2 - 6 = 0.$
в.23	$x^3 - 3x^2 + 1,5 = 0.$	**в.24**	$x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0.$
в.25	$x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0.$		

Контрольные вопросы.

1. **В** чем заключается этап отделения корней?
2. Будет ли достаточно условия $f(a) \cdot f(b) < 0$, чтобы утверждать, что на $[a,b]$ $f(x) = 0$ имеет а) корень?

   б) единственный корень? Почему?
3. Геометрический смысл метода хорд. Изобразить на рисунке.
4. Геометрический смысл метода Ньютона. Изобразить на рисунке.
5. Геометрический смысл метода простых итераций. Изобразить на рисунке.
6. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения методом Ньютона?
7. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения методом хорд?
8. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения комбинированным методом ?
9. Каковы достаточные условия сходимости итерационной последовательности уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$, содержащем этот корень?
10. Что может служить критерием для прекращения вычислений при достижении заданной точности решения уравнения методом простой итерации?