Лабораторная работа №3 Приближенное вычисление интегралов.

Определенные интегралы не всегда можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница. Например, для интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ не существует первообразной функции в классе элементарных функций.

Если к тому же учесть, что иногда подынтегральная функция вовсе задается таблицей или графиком, то становится понятным, почему интегрирование по формуле Ньютона-Лейбница не получает широкого применения на практике.

В подобных случаях применяют различные методы приближенного интегрирования. Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называют **квадратурными формулами**. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом, например многочленом Лагранжа $L_n(x)$, и получается приближенное равенство $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$.

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, опирающимся на значения подынтегральной функции на отрезке интегрирования, легко реализуемым на ЭВМ и позволяющим получать результат с достаточной точностью. При этом, естественно, предполагается, что отрезок $[a;b]$ разбит на n частей точками $a = x_0, x_1, \dots x_n = b$, наличие которых подразумевается при построении многочлена Лагранжа.

Подставим вместо $L_n(x)$ его представление:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)},$$

получим:

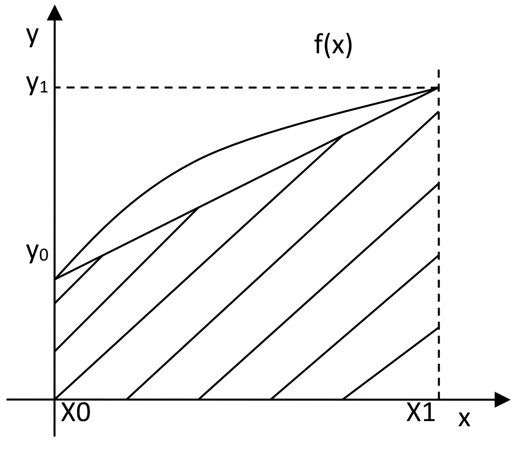
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}dx$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i A_i, \text{ где } A_i = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}dx$$

Таким образом, **квадратурная формула общего вида выглядит так:**

$$\int_a^b f(x)dx = y_0A_0 + y_1A_1 + \ldots + y_nA_n$$



Простая формула трапеций.

В качестве узлов интерполирования выберем начало и конец отрезка интегрирования, то есть заменим подынтегральную функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа первой степени.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = y_0A_0 + y_1A_1$

Введем обозначения $a = x_0, x_1 = b$ и шаг интегрирования $h = x_1 - x_0$ Найдем A_0, A_1

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = \frac{h}{2} \quad A_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_0}{x_1-x_{01}}dx = \frac{h}{2}$$

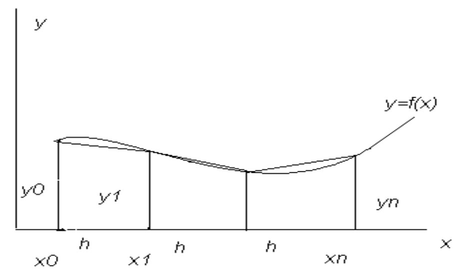
Следовательно имеем:

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 \quad + y_1)$- формула трапеций.

Замечание.
Геометрически, формула трапеций означает замену площади криволинейной фигуры площадью трапеции (см. рисунок).
Если аналитическое выражение подынтегральной функции $f(x)$ известно, то для **оценки погрешности метода трапеций** можно воспользоваться формулой

$R_t = \frac{b-a}{12} h^2 M_2$, где $M_2 = max\left|f''(x)\right|, x \in [a, b]$

Очевидно, что чем меньше шаг h, тем меньше приближенное значение отличается от точного значения.
Разделим промежуток интегрирования $[a; b]$на n равных частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ (шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$.) К каждому из полученных промежутков применим формулу трапеций и получим общую(составную) формулу трапеций.



$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}))$- **общая формула трапеций**.

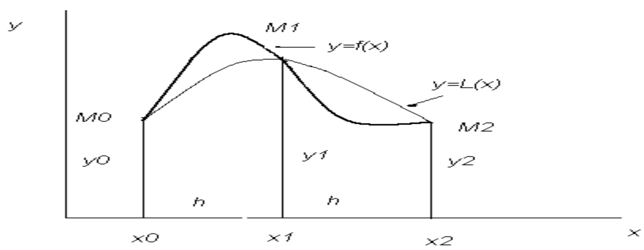
Формула Симпсона.
Заменим подынтегральную функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа второй степени. В качестве узлов интерполирования выберем концы и середину отрезка интегрирования. Тогда из квадратурной формулы общего вида получим

$\int_a^b f(x)dx \approx y_0 A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2$

Несложно вычислить коэффициенты A_0, A_1, A_2. В результате получим:

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$ – **простая формула Симпсона**.

Геометрически эта формула получается в результате замены кривой$y = f(x)$, параболой $y = L(x)$, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$(см. рис.)



Если аналитическое выражение подынтегральной функции $f(x)$ известно, то для **оценки погрешности метода Симпсона** можно воспользоваться формулой

$R_s = \frac{b-a}{180} h^4 M_4$, где $M_4 = max\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a, b]$

Если отрезок интегрирования большой, то, разбив его на ***четное*** число отрезков длины h $(h = \frac{b-a}{2n})$, можно получить **общую (составную) формулу Симпсона**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right).$$

Замечание. Для практической оценки погрешности метода интегрирования может быть использована простая формула. Пусть R_n и R_{2n}- погрешности интегрирования по квадратурной формуле , соответственно при n и $2n$ отрезках разбиения. Учитывая оценку погрешностей, можно составить равенство

$\frac{R_n}{R_{2n}} = \frac{h_n^k}{h_{2n}^k}$, гдеh_n и h_{2n} – длина отрезков разбиения (шаг интегрирования) в первом и во втором случае, k-порядок погрешности относительно шага. Понятно, что $h_{2n} = \frac{h_n}{2}$. Тогда $R_n = 2^k R_{2n}$

Если I– истинное значение интеграла, то

$I = I_n + R_n$ и $I = I_{2n} + R_{2n}$ откуда $I_n + 2^k R_{2n} = I_{2n} + R_{2n}$,

т.е. $|R_{2n}| = \frac{|I_n - I_{2n}|}{2^k - 1}$

Эта формула называется правилом Рунге. Она удобна для практической оценки погрешности квадратурных формул, но требует двойного пересчета. Для метода трапеций имеем:

$$|R_{2n}| = \frac{|I_n - I_{2n}|}{2^2 - 1} = \frac{|I_n - I_{2n}|}{3}$$

для метода Симпсона соответственно:

$$|R_{2n}| = \frac{|I_n - I_{2n}|}{2^4 - 1} = \frac{|I_n - I_{2n}|}{15}$$

Пример.

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(3x+4)^2} dx$ с погрешностью $\varepsilon = 0{,}001$.

1) по формуле трапеций, выбрав шаг $h < \sqrt{\varepsilon}$, оценив погрешность вычислений по правилу Рунге;
2) по формуле Симпсона, выбрав шаг $h < \sqrt[4]{\varepsilon}$, оценив погрешность вычислений по правилу Рунге.

Решение.

Предварительно найдем точное значение интеграла и его приближенное значение со всеми верными знаками.

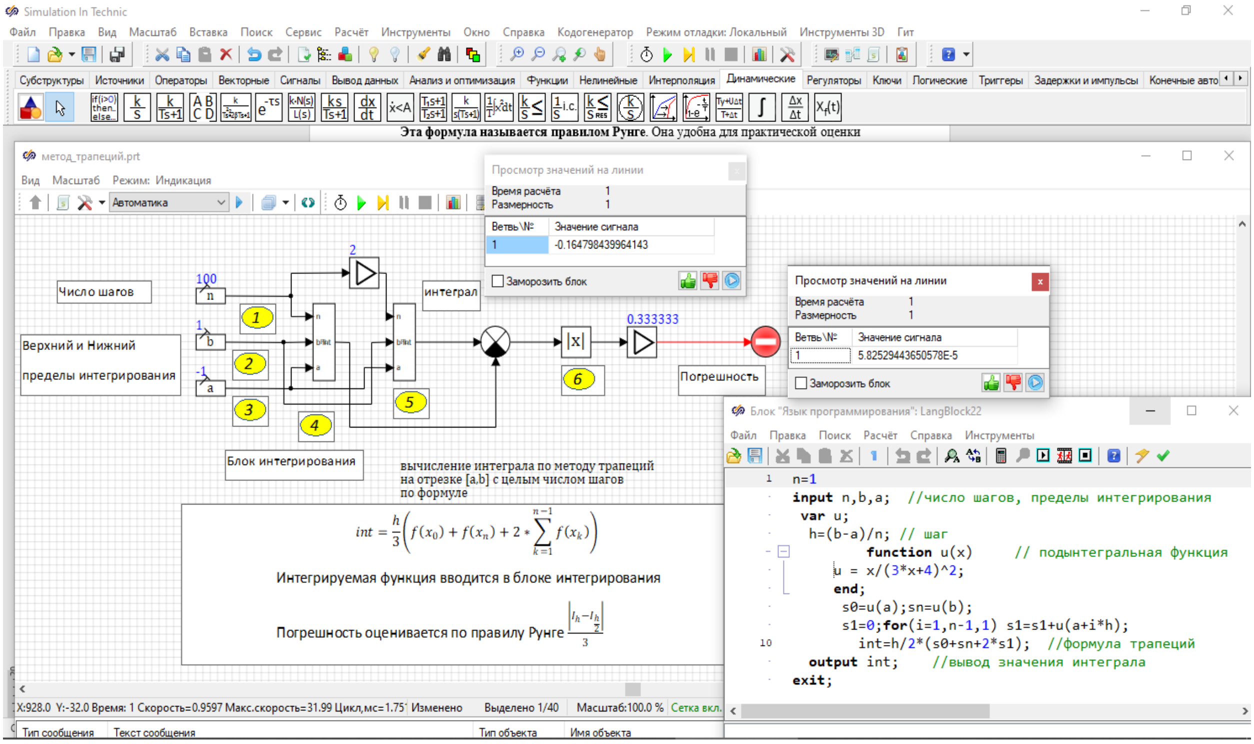
$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{(3x+4)^2} dx = -\frac{8}{21} + \frac{1}{9}\ln(7)$$

-.1647401422

Для нахождения интеграла по формуле трапеций воспользуемся составной формулой трапеций.

По условию, $h < \sqrt{0.001} \approx 0.031, \text{т. е.} h = 0.02,$ чтобы при $a = -1, b = 1$ число шагов было целым числом. Тогда отрезок разобьем на $n = \frac{b-a}{h} = 100$ участков точками

$x_0, x_1, \dots x_{100}$, где $x_i = x_0 + ih$ и найдем значения подынтегральной функции в этих точках $y_0, y_1, \dots y_{100}$. Применение формулы трапеций и правила Рунге двойного пересчета для окончательной оценки погрешности произведем в пакете Simintech согласно структурной схеме, представленной ниже.



Сформируем рабочее окно программы в пакете Simintech стандартным путем. Наберем структурную схему программы:

А). Создадим в рабочем окне блоки ввода данных (1, 2, 3), перенеся их их основного окна пакета из модуля «источники». Это блоки ввода числа шагов, верхнего и нижнего пределов интегрирования;

Б). Создадим блок интегрирования функции методом трапеций, позаимствовав из модуля «динамические» основного окна блок «язык программирования», набрав и отредактировав в этом блоке указанную на рисунке подпрограмму метода трапеций (4);

В). Продублируем блок интегрирования стандартным образом (5);

Г). Соединим порты вывода блоков данных с портами ввода блоков интегрирования, увеличив число шагов для второго блока интегрирования в два раза, использовав стандартный блок «усилитель» модуля операторы;

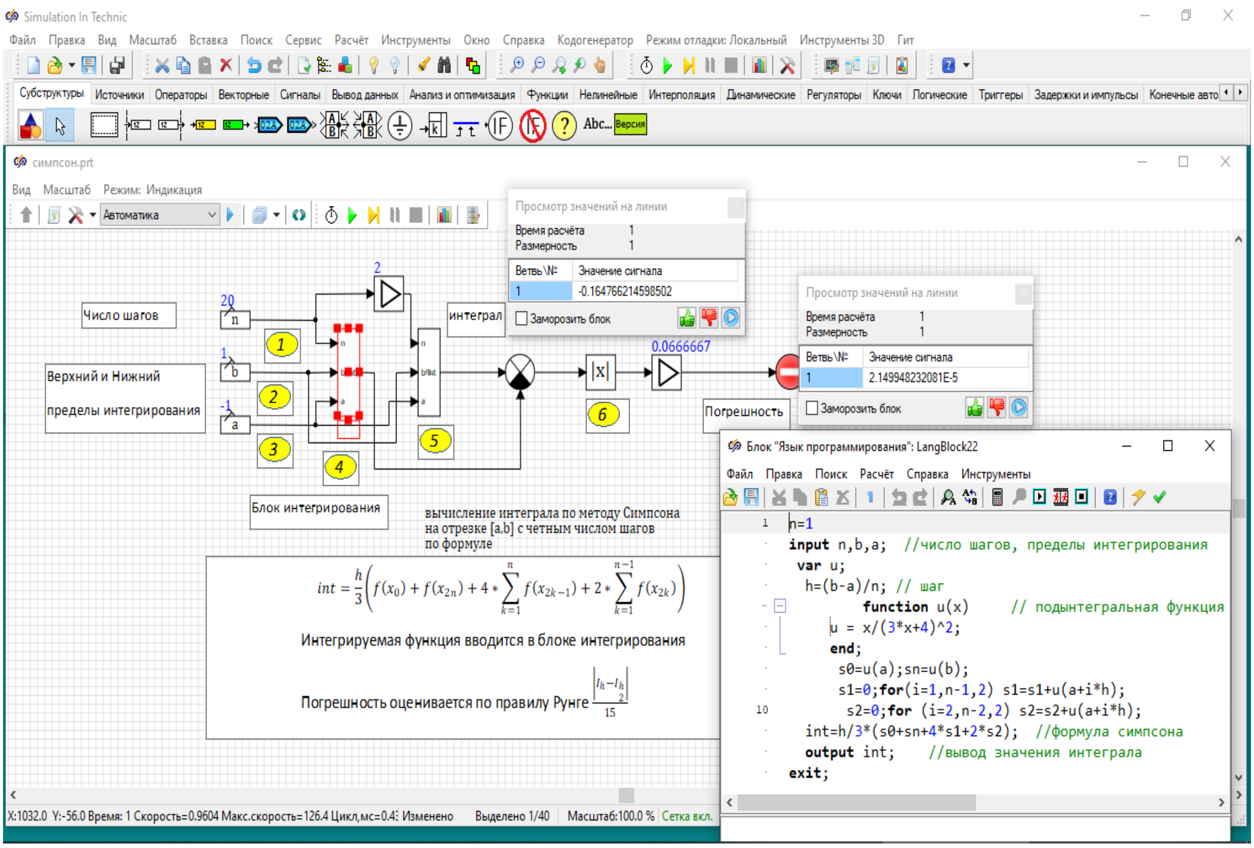
Д). Сигналы с портов вывода блоков интегрирования через блоки «вычитание», «модуль» и «усилитель» (6) модуля операторы проведем до окончания процесса вычислений;

Е). Инициализируем программу, запустим вычисления и установив курсор на линию передачи сигнала и щелкнув левой клавишей мыши, увидим значение интеграла и погрешность найденного приближенного значения, как показано на рисунке.

Как видно из рисунка значение интеграла найдено даже с погрешностью меньшей заданной. То есть задача решена.

Для нахождения интеграла по формуле Симпсона воспользуемся составной формулой Симпсона.

По условию, $h < \sqrt[4]{0.001} \approx 0.18$, т. е. $h = 0.1$, чтобы при $a = -1, b = 1$ число шагов было четным целым числом. Тогда отрезок разобьем на $n = \frac{b-a}{h} = 20$ участков точками $x_0, x_1, \dots x_{20}$, где $x_i = x_0 + ih$ и найдем значения подынтегральной функции в этих точках $y_0, y_1, \dots y_{20}$. Применение формулы Симпсона и правила Рунге двойного пересчета для окончательной оценки погрешности произведем в пакете Simintech, изменив блок интегрирования структурной схемы, представленной выше. Схема будет выглядеть как представлено ниже. Алгоритм работы аналогичен схеме метода трапеций. Значения интеграла, погрешность вычислений и распечатка блока интегрирования представлены на фоне рабочего окна структурной схемы.



Очевидно преимущество метода Симпсона над методом трапеций – требуемая точность достигается за меньшее число шагов. При одинаковом числе шагов метод Симпсона на два порядка точнее.

Замечание.
В пакете Simintech есть возможность воспользоваться стандартными блоками интегрирования. В разделе операторы есть блок вычисления определенного интеграла по методу трапеций. Вызов блока осуществляется в рабочем окне стандартным образом. На вход один подается векторный сигнал значений аргумента подынтегральной функции, вход 2 подается векторный сигнал значений подынтегральной функции. На порту вывода – значение интеграла.
Контрольное задание.

1) по формуле трапеций, выбрав шаг $h < \sqrt{\varepsilon}$, оценив погрешность вычислений по правилу Рунге;
2) по формуле Симпсона, выбрав шаг $h < \sqrt[4]{\varepsilon}$, оценив погрешность вычислений по правилу Рунге
3) Сделать проверку полученных результатов, используя соответствующий блок пакета Simintech.

Условие вашего задания:

Номер варианта по журналу	1	2
1	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	$\int_{1,2}^{2} \frac{\log(x+2)}{x} dx$
2	$\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$	$\int_{1,2}^{2} (x+1) sinx\, dx$
3	$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$	$\int_{0,2}^{1} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x^2+1} dx$
4	$\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos(x)}{x+1} dx$
5	$\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2) dx$
6	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$
7	$\int_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{\log(x^2+1)}{x} dx$
8	$\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x)}{x+2} dx$
9	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$	$\int_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin x\, dx$
10	$\int_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$	$\int_{0,4}^{0,8} \frac{\mathrm{tg}(x^2+0,5)}{1+2x^2} dx$

11	$\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1} dx$
12	$\int_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$	$\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1} \cos(x^2)\, dx$
13	$\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$	$\int_{1,4}^{3} x^2 \lg x \, dx$
14	$\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	$\int_{1,4}^{2,2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1} dx$
15	$\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$
16	$\int_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$	$\int_{0,8}^{1,6} (x^2+1) \sin(x-0,5)\, dx$
17	$\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$	$\int_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x \, dx$
18	$\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$
19	$\int_{1б4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0б7}}$	$\int_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1} dx$
20	$\int_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$	$\int_{0,5}^{1,2} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x+1} dx$
21	$\int_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$	$\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$
22	$\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$	$\int_{0,2}^{1} (x+1) \cos(x^2)\, dx$
23	$\int_{2,1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$	$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0,4)}{x+2} dx$
24	$\int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$	$\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1} \lg(x+3)\, dx$

Контрольные вопросы.

1. Как зависят коэффициенты A_i от подынтегральной функции $f(x)$ в квадратурной формуле?
2. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага h?
3. Каким способом можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?
4. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?
5. В чем состоит суть правила Рунге двойного пересчета при вычислении интегралов?
6. Какова формула правила Рунге при вычислении интеграла методом трапеций?
7. Какова формула правила Рунге при вычислении интеграла методом Симпсона?
8. Изобразить блок-схему правила Рунге для вычисления интеграла с заданной погрешностью?
9. Правило выбора шага при применении формулы Трапеций?
10. Правило выбора шага при применении формулы Симпсона?
11. Для каких функций формула трапеций дает точное значение интеграла даже при максимально возможном шаге квадратурной формулы?
12. Для каких функций формула Симпсона дает точное значение интеграла даже при максимально возможном шаге квадратурной формулы?